1. 이차함수 $f(x)=x^2+ax+6$ 에 대하여 $f(-2)=8$, $f(1)=b$를 만족할 때, $b-a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$f(-2)=4-2a+6=8, a=1$ 이고 $f(1)=1+1+6=8=b$ 이므로 $b-a=8-1=7$ 이다.

2. 다음 중 이차함수 $y = -\frac{3}{4}x^2$ 의 그래프 위에 있는 점은?

① $\left(1, \frac{3}{4}\right)$ ② $(-2, 3)$ ③ $(2, -3)$
④ $\left(3, \frac{27}{4}\right)$ ⑤ $(-4, 12)$

해설

① $x = 1$ 일 때, $y = -\frac{3}{4}$ 이다.
② $x = -2$ 일 때, $y = -3$ 이다.
④ $x = 3$ 일 때, $y = -\frac{27}{4}$ 이다.
⑤ $x = -4$ 일 때, $y = -12$ 이다.

3. y 가 x^2 에 비례하고, $x = 3$ 일 때, $y = 3$ 이다. y 와 x 의 관계식을 $y = ax^2$ 의 꼴로 나타낼 때, a 의 값으로 알맞은 것을 고르면?

① 0 ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

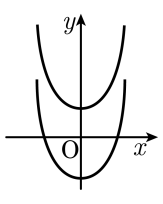
해설

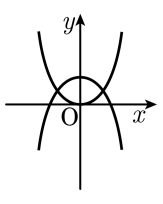
$y = ax^2$

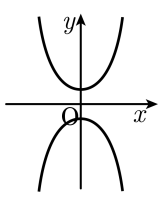
$3 = 9a$

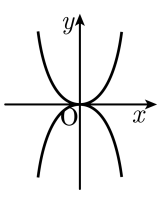
$\therefore a = \frac{1}{3}$

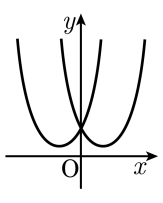
4. x 축에 대하여 서로 대칭인 두 그래프를 알맞게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

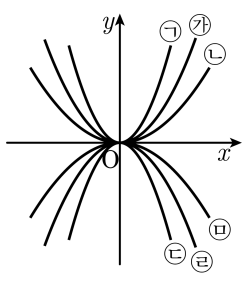
④ 

⑤ 

해설

그래프를 x 축을 기준으로 반대방향으로 그린 것이다.

5. 다음 그림은 모두 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이며, x 축을 기준으로 위, 아래에 놓여있는 그래프는 서로 대칭이다. 그 중 ㉮는 $y = x^2$ 의 그래프이다. $-1 < a < 0$ 일 때, $y = ax^2$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것을 찾아 기호로 써라.



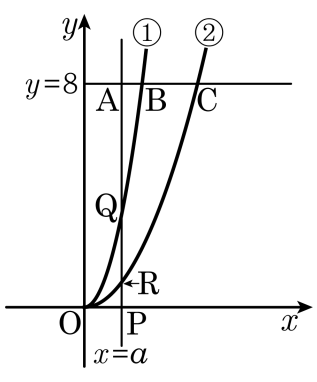
▶ 답:

▷ 정답: ㉤

해설

$-1 < a < 0$ 이므로 위로 볼록, $|a| < 1$ 이므로 폭은 ㉮ $y = x^2$ 보다 넓은 포물선이다.
따라서 ㉤이다.

6. 다음 그림은 이차함수 $y = 2x^2 (x \geq 0) \cdots ①$, $y = \frac{1}{2}x^2 (x \geq 0) \cdots ②$ 의 그래프이다. 직선 $y = 8$이 y축 및 곡선 ①, ② 와 점 A, B, C에서 만나고 $x = a$가 x축 및 곡선 ①, ② 와 점 P, Q, R에서 만날 때, 원점과 점 C를 지나는 직선이 곡선 ①과 만나는 점의 좌표를 $(p,\ q)$라 하자. 이 때 $p + q$의 값을 구하여라. (단, 원점은 제외)



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\overline{OC}$의 식은 $y = 2x$

$2x^2 = 2x, x^2 - x = 0, x(x-1) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$

$\therefore (p, q) = (1,\ 2) (\because x \neq 0)$

$\therefore p + q = 1 + 2 = 3$

7. 이차함수 $y = -3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동시키면 점 $(2,\ a)$를 지난다고 한다. a 의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y = -3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 함수의 식은$y = -3(x-3)^2$ 이고, 점 $(2,\ a)$ 를 지나므로

$a = -3(2-3)^2$

$\therefore a = -3$

8. 이차함수 $y = -3(x+1)^2$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것은?

① $y = -3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 포물선이다.
② 꼭짓점의 좌표는 $(0, -1)$ 이다.
③ 점 $(2, 27)$ 을 지난다.
④ $x > -1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
⑤ 축의 방정식은 $x = 1$ 이다.

해설

① $y = -3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 포물선이다.
② 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 0)$ 이다.
③ 점 $(2, -27)$ 을 지난다.
⑤ 축의 방정식은 $x = -1$ 이다.

9. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동하였더니 $y = 3x^2 + bx + 1$ 이 되었다. $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① -16 ② -17 ③ -18 ④ -19 ⑤ -20

해설

$$\begin{aligned} y &= a(x-2)^2 + c \\ &= ax^2 - 4ax + 4a + c \\ &= 3x^2 + bx + 1 \end{aligned}$$

$a = 3,\ b = -12, c = -11$

$\therefore a + b + c = -20$

10. 이차함수 $y = -3x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(5, -2)$ 가 되도록 평행이동하면 점 $(k, -3)$ 을 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 곱하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{74}{3}$ ④ $-\frac{80}{3}$ ⑤ -10

해설

$y = -3x^2$ 을 꼭짓점의 좌표가 $(5, -2)$ 가 되도록 평행이동하면 $y = -3(x-5)^2 - 2$ 이고
$y = -3(x-5)^2 - 2$ 가 점 $(k, -3)$ 을 지나므로 대입하면 $-3 = -3(k-5)^2 - 2$, $3k^2 - 30k + 74 = 0$ 이다.
상수 k 의 값의 곱은 $3k^2 - 30k + 74 = 0$ 의 두 근의 곱과 같으므로 $\frac{74}{3}$ 이다.

11. 이차함수 $y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$ 의 그래프에서 x 값이 증가함에 따라 y 값도 증가하는 x의 값의 범위는?

① $x>0$ ② $x<2$ ③ $x>2$

④ $x>-2$ ⑤ $x<-2$

해설

꼭짓점이 $(-2,0)$이고 위로 볼록한 그래프이다. $x<-2$ 일 때, x가 증가하면 y 도 증가한다.

12. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 6 만큼 평행이동시켰더니 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프가 되었다. 이 때, apq 의 값은?

① 6 ② -6 ③ 8 ④ 9 ⑤ -9

해설

x축에 대하여 대칭이동하면

$y = -\frac{1}{2}x^2$

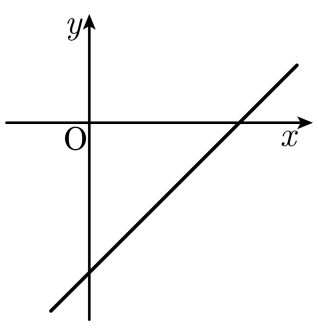
x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동하면

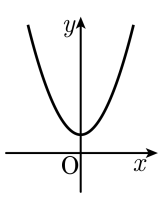
$y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 6$

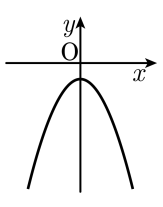
$\therefore a = -\frac{1}{2},\ p = -3,\ q = 6$

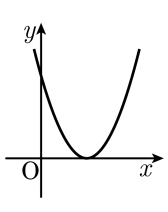
$\therefore apq = \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-3) \times 6 = 9$

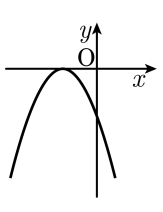
13. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프의 개형은?

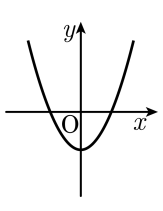


① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$y = ax + b$ 의 그래프에서
$a > 0, b < 0$ 이다.

14. 이차함수 $y = \frac{4}{3}x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 48$ 사이에 둘러싸인 도형 내부의 좌표 중, x, y좌표의 값이 모두 자연수인 점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 170 개

해설

$y = \frac{4}{3}x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 48$ 이 만나는 두 점은 각각 $(-6,\ 48),\ (6,\ 48)$

둘러싸인 부분의 x 좌표의 범위는 $-6 \le x \le 6$ 이므로 이 범위 안의 자연수는 $1,\ 2,\ \cdots,\ 6$ 의 6 개가 있다.

(1) $y = 16$ 위에 있는 자연수인 점은 $(1,\ 16),\ (2,\ 16),\ \cdots (6,\ 16)$ 로 6 개가 있다.

(2) $y = \frac{4}{3}x^2$ 의 그래프 위에 있는 자연수인 점은 $(3,\ 12)(6,\ 48)$ 의 2 개가 있다.

따라서

x 좌표가 6 일 때 : 1 개

x 좌표가 5 일 때 :

y 좌표는 34 부터 48 까지이므로 15 개

x 좌표가 4 일 때 :

y 좌표는 22 부터 48 까지이므로 27 개

x 좌표가 3 일 때 :

y 좌표는 12 부터 48 까지이므로 37 개

x 좌표가 2 일 때 :

y 좌표는 6 부터 48 까지이므로 43 개

x 좌표가 1 일 때 :

y 좌표는 2 부터 48 까지이므로 47 개

$\therefore\ 1 + 15 + 27 + 37 + 43 + 47 = 170$ (개)

15. 다음 이차함수를 $y=\frac{1}{3}(x-p)^2-5$로 나타낼 수 있다. 이 때, 꼭짓점이 $(p,-5)$ 라고 할 때, apq의 값은?

$y=ax^2+6x+q$

① -45 ② -54 ③ -66 ④ -76 ⑤ -80

해설

$y=\frac{1}{3}(x-p)^2-5$

$=\frac{1}{3}(x^2-2px+p^2)-5$

$=\frac{1}{3}x^2-\frac{2px}{3}+\frac{p^2}{3}-5$

따라서 $a=\frac{1}{3}, \ -\frac{2}{3}$

$p=6, \ p=-9, \ q=22$ 이므로 $apq=-66$ 이다.

16. 이차함수 $y = x^2 - 4x + 1$ 의 꼭짓점이 일차함수 $y = ax + 1$ 의 위를 지날 때, a 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$ 이다.
꼭짓점 $(2, -3)$ 이 $y = ax + 1$ 의 위에 있으므로 $-3 = 2a + 1$ 이다.
$\therefore a = -2$

17. 이차함수 $y = -2x^2 - 12x + 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하였더니 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ -16)$ 을 지났다. $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -19

해설

평행이동한 그래프의 식을
$y = -2x^2 + bx + c$ 라고 하자.
$y = -2x^2 + bx + c$ 의 그래프가 $(-2,\ 0)$, $(0,\ -16)$ 을 지나므로
$0 = -8 - 2b + c,\ -16 = c$
$0 = -8 - 2b - 16 \qquad \therefore\ b = -12$
$y = -2x^2 - 12x - 16 = -2(x + 3)^2 + 2$
$y = -2x^2 - 12x + 3 = -2(x + 3)^2 + 21$
꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 21)$ 에서 $(-3,\ 2)$ 로 이동하였으므로 $p = 0,\ q = -19$ 이다.
$\therefore\ p + q = 0 - 19 = -19$

18. 다음 보기의 이차함수 그래프 중 $y = ax^2$ 의 그래프가 3 번째로 폭이 넓을 때, $|a|$ 의 범위는?

보기

㉠ $y = -\frac{3}{2}x^2$ ㉡ $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$

㉢ $y = 2x^2 - x$ ㉣ $-3(x+2)^2$

㉤ $y = \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}$

① $1 < |a| < \frac{1}{2}$ ② $1 < |a| < \frac{3}{2}$ ③ $1 < |a| < \frac{5}{2}$

④ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{5}{2}$

해설

a 의 절댓값이 작을수록 폭이 넓어진다.
a 의 절댓값을 각각 구하면
㉠ $\frac{3}{2}$ ㉡$\frac{1}{2}$ ㉢2 ㉣3 ㉤1 이므로 폭이 넓은 순서는 ㉡, ㉤, ㉠, ㉢, ㉣ 이다. 따라서 두 번째인 1과 세 번째인 $\frac{3}{2}$ 사이에 있어야 하므로
④ $1 < |a| < \frac{3}{2}$ 이다.

19. 이차함수 $y = x^2 + px + 4$ 의 그래프가 점 $(1, 6)$ 을 지난다. 이 그래프에서 x 의 값이 증가할 때 y의 값이 증가하는 범위가 될 수 있는 것은?

① $x < 1$ ② $x < -1$ ③ $x > \frac{1}{2}$

④ $x > -\frac{1}{2}$ ⑤ $x > 2$

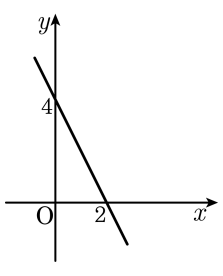
해설

$(1, 6)$을 대입하여 p 의 값을 구하면 $p = 1$ 이다.

$p = 1$ 을 대입하면 $y = x^2 + x + 4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4 - \frac{1}{4}$ 이다.

따라서 축의 방정식은 $x = -\frac{1}{2}$ 이므로 $x > -\frac{1}{2}$ 일 때 x 의 값이 증가할 때 y의 값은 증가한다. 따라서 ④이다.

20. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y = \frac{1}{2}ax^2 + bx + 3$ 의 꼭짓점의 좌표를 구하면?



① $(-2,\ 7)$ ② $(-2,\ -7)$

③ $(7,\ 2)$ ④ $(-7,\ 2)$

⑤ $(2,\ 7)$

해설

$a = -2, b = 4$ 이므로

$$y = \frac{1}{2}ax^2 + bx + 3$$
$$= -x^2 + 4x + 3$$
$$= -(x-2)^2 + 7$$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(2, 7)$ 이다.

21. 이차함수 $y = 3x^2 + 2x + a$ 의 그래프가 점 $(a, a^2 + 2)$ 를 지나고 x 축과 두 점에서 만나도록 a 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a = -2$

해설

$a^2 + 2 = 3a^2 + 2a + a$, $2a^2 + 3a - 2 = 0$,
$(2a - 1)(a + 2) = 0$
$\therefore a = \frac{1}{2}, \ -2$
x 축과 두 점에서 만나므로
$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot a > 0$, $a < \frac{1}{3}$
$\therefore \ a = -2$

22. 다음 함수의 그래프 중에서 제2 사분면을 지나지 <u>않는</u> 것은?

① $y = -3x^2 + 1$ ② $y = -(x-1)^2$

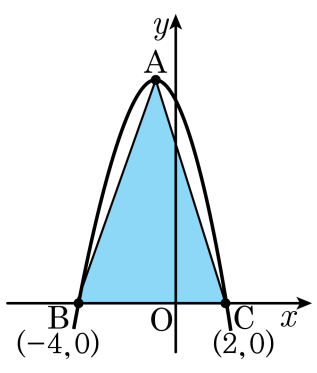
③ $y = -2(x+2)^2 + 1$ ④ $y = 2(x-1)^2 + 2$

⑤ $y = -3(x+3)^2 + 4$

해설

② $y = -(x-1)^2$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 0)$ 이고, 위로 볼록이므로 제2사분면을 지나지 않는다.

23. 다음 그림은 이차함수 $y = -x^2 - 2x + 8$의 그래프이다. 꼭짓점을 A, x축과의 교점을 각각 B, C라고 할 때, $\triangle ABC$의 넓이는?



① 10 ② 15 ③ 20 ④ 24 ⑤ 27

해설

$A(-1, 9), B(-4, 0), C(2, 0)$이므로 $\triangle \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$이다.

24. 이차함수 $y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4$ 의 그래프의 꼭짓점을 A, y 절편을 B, x 절편을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 ABCD 의 넓이가 36 가 되는 모든 k 의 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4 = (x - 3k)^2 - 4$

$\therefore$ A$(3k,\ -4)$, B$(0,\ 9k^2 - 4)$

$y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4$ 에서 $x = 3k - 2$ 또는 $3k + 2$

$\therefore$ C$(3k - 2,\ 0)$, D$(3k + 2,\ 0)$

$k > 0$ 이므로 y 절편, 두 개의 x 절편 모두 0 보다 크다.

$\therefore$ $\square$ABCD $= \triangle$CAD $+ \triangle$BCD

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times (3k + 2 - 3k + 2) + \frac{1}{2} \times (9k^2 - 4)(3k + 2 - 3k + 2)$$

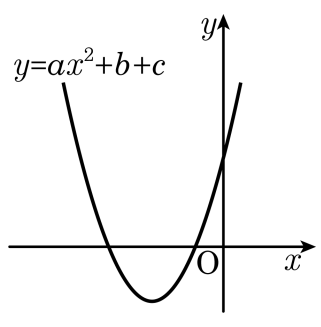
$$= 36$$

이 식을 정리하면 $8 + 2 \times (9k^2 - 4) = 36$

$k^2 = 2 \quad \therefore\ k = \pm\sqrt{2}$

따라서 k 값의 곱은 $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$ 이다.

25. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?



① $a + b + c > 0$ ② $a < 0$ ③ $b > 0$

④ $c < 0$ ⑤ $a - b + c < 0$

해설

아래로 볼록이므로 $a > 0$

축의 방정식 $x = -\dfrac{b}{2a} < 0$ 이므로 $b > 0$

y 절편이 양수이므로 $c > 0$

한편 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면

① $f(1) = a + b + c > 0$

⑤ $f(-1) = a - b + c$: 판단할 수 없다.