1. 정수 x의 값이 $-2 \le x \le 2$일 때, $2x+1$의 최댓값은?

① -3 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

$2x+1$은 x에 2를 곱하고 1을 더하여 얻은 값이다. 그러므로 x가 커지면 $2x+1$값도 커진다.
따라서 $x=2$일 때 $2x+1$값은 최대이고 그 값은 5 이다.

해설

$-2 \le x \le 2 \ \Rightarrow\ -4 \le 2x \le 4$
$\Rightarrow\ -3 \le 2x+1 \le 5$
$\therefore$ 최댓값은 5

2. 이차부등식 $x^2 - 2x - 8 < 0$의 해가 $a < x < b$일 때, $b - a$의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$x^2 - 2x - 8 < 0$ 에서 $(x - 4)(x + 2) < 0$

$\therefore -2 < x < 4$

$b - a = 6$

3. 연립부등식 $\begin{cases} 2x^2+3x-2 \le 0 \\ 2x^2+x-3<0 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 < x \le \dfrac{1}{2}$ ② $-2 < x \le 1$ ③ $-\dfrac{3}{2} < x \le 1$
④ $-\dfrac{3}{2} < x \le \dfrac{1}{2}$ ⑤ $1 < x \le 2$

해설

$$\begin{cases} 2x^2+3x-2 \le 0 & \cdots (가) \\ 2x^2+x-3<0 & \cdots (나) \end{cases}$$

(가)에서 $(2x-1)(x+2) \le 0$

$\therefore -2 \le x \le \dfrac{1}{2}$

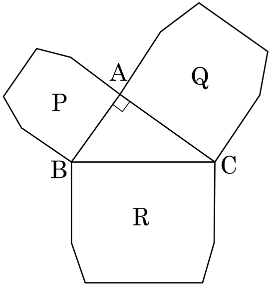
(나)에서 $(2x+3)(x-1) < 0$

$\therefore -\dfrac{3}{2} < x < 1$

따라서 공통 범위를 구하면

$-\dfrac{3}{2} < x \le \dfrac{1}{2}$

4. 다음 그림과 같이, 직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 닮은 도형 P, Q, R가 있다. 도형 P, Q, R의 넓이를 각각 x, y, z 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?



① $xy = z$

② $x + y = z$

③ $x^2 + y^2 = z^2$

④ $x^3 + y^3 = z^3$

⑤ 위에는 정답이 없다.

해설

도형 P, Q, R가 닮은 도형들이고 그들의 닮음비가 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC}$이므로 도형 P, Q, R의 넓이의 비는 닮음비의 제곱인 $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$이 된다. 그런데 $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

따라서, 도형 P, Q, R의 넓이를 각각 x, y, z라 하면 $x + y = z$

5. x에 대한 부등식 $(a+b)x+a-2b>0$의 해가 $x<1$일 때, x에 대한 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$의 해는?

① $x<-10$ ② $x<-5$ ③ $x>-5$

④ $x<5$ ⑤ $x>5$

해설

$(a+b)x+a-2b>0$에서 $(a+b)x>-a+2b\cdots$㉠

㉠의 해가 $x<1$이려면 $a+b<0\cdots$㉡

㉠이 양변을 $a+b$로 나누면 $x<\dfrac{-a+2b}{a+b}$이므로

$\dfrac{-a+2b}{a+b}=1,\quad -a+2b=a+b$

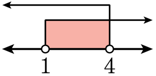
$\therefore 2a=b\cdots$㉢

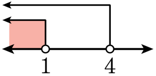
㉢을 ㉡에 대입하면 $a+2a=3a<0$ $\therefore a<0$

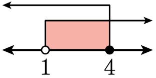
㉢을 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$에 대입하면

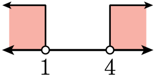
$(2a-3a)x+a+4a>0,\quad -ax>-5a\quad \therefore x>5$

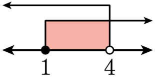
6. 연립부등식 $\begin{cases} 3-x>-1 \\ 3x-1\geq 2 \end{cases}$ 의 해를 수직선에 바르게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$3-x>-1,\ x<4$ 이고

$3x-1\geq 2,\ \ 3x\geq 3,\ \ x\geq 1$ 이므로

$1\leq x<4$ 이다.

7. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-2) > 5x+2 \\ -2(x+7) \le 3x+21 \end{cases}$ 을 만족하는 해 중에서 가장 작은 정수와 가장 큰 정수의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -12

해설

$3x-6 > 5x+2$, $x < -4$ 이고 $-2x-14 \le 3x+21$, $5x \ge -35$, $x \ge -7$ 이므로 $-7 \le x < -4$ 이다.
따라서 가장 작은 정수는 -7 이고 가장 큰 정수는 -5 이므로 -12 이다.

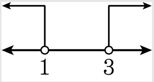
8. 연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} > 1 \\ 0.7x + 0.5 < 0.2x + 1 \end{cases}$ 의 해는?

① $-3 < x < 3$　　② $x < -3$　　③ $x > 3$

④ 해가 없다.　　⑤ $-3 < x < 5$

해설

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} > 1 \\ 0.7x + 0.5 < 0.2x + 1 \end{cases}$



$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 > 2 \\ 7x + 5 < 2x + 10 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 5x < 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 1 \end{cases}$

따라서 해가 없다.

9. x의 범위가 -1, 0, 1, 2일 때, 다음 부등식 중 해가 <u>없는</u> 것은?

① $2x < -4$　　② $x+3 < 4$　　③ $3x-2 \le 1$

④ $-x+6 \ge 7$　　⑤ $2x-3 \ge -1$

해설

① $x < -2$

② $x < 1$

③ $x \le 1$

④ $x \le -1$

⑤ $x \ge 1$

10. 연립부등식

$$\begin{cases} 4x - a < 3x \\ 3(x-2) \geq 2x - 1 \end{cases}$$

의 해가 없을 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < 10$　　② $a \leq 10$　　③ $a > 5$

④ $a \leq 5$　　⑤ $a > 3$

해설

$4x - a < 3x$, $x < a$, $3(x-2) \geq 2x - 1$, $x \geq 5$, 해가 없으려면 $a \leq 5$

11. 부등식 $x^2 - 4|x| - 5 < 0$을 풀면?

① $-5 < x < 5$ ② $-5 < x < 0$ ③ $-5 < x < 1$

④ $-1 < x < 5$ ⑤ $-1 < x < 6$

해설

(i) $x \geq 0$일 때, $|x| = x$이므로

$x^2 - 4x - 5 < 0,\ (x-5)(x+1) < 0$

$-1 < x < 5$

이 때 $x \geq 0$과의 공통범위는 $0 \leq x < 5$

(ii) $x < 0$일 때

$x^2 + 4x - 5 < 0,\ (x+5)(x-1) < 0$

$-5 < x < 1$

이 때 $x < 0$과 공통 범위는 $-5 < x < 0$

(i), (ii)에서 $-5 < x < 5$

12. x 에 대한 이차부등식 $x^2 + ax + b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 또는 $x > 4$ 일 때 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + ax + b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 또는 $x > 4$ 이려면
$(x-1)(x-4) > 0$ 에서 $x^2 - 5x + 4 > 0$ 이므로
$a = -5,\ b = 4$ 따라서 $a + b = -1$

13. 세 변의 길이가 $x-1,\ x,\ x+1$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a < x < b$라 할 때, 방정식 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x-1,\ x,\ x+1$은 삼각형의 세 변이므로

$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$, $x-1+x>x+1$ ∴ $x>2$ ⋯⋯㉠

한편, 둔각삼각형이 되려면

$(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$

$x^2-4x<0$에서 $0<x<4$⋯⋯㉡

㉠,㉡에서 $2<x<4$

∴ $a=2,\ b=4$

따라서 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{b}{a}=\frac{4}{2}=2$$

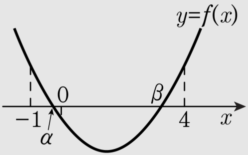
14. 이차방정식 $x^2-4kx+k^2-1=0$의 해를 α,β라 할 때, $-1<\alpha<0<\beta<4$를 만족시키는 실수 k의 값의 범위는?

① $-1\le k<1$　② $-1<k<1$　③ $-1<k<5$

④ $0<k<1$　⑤ $0<k<5$

해설

$f(x)=x^2-4kx+k^2-1$ 이라 하면
$f(x)=0$ 의 근 α,β 가
$-1<\alpha<0<\beta<4$ 를 만족시키므로
$y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) $f(-1)>0$ 에서 $k^2+4k>0$

$\therefore k<-4$ 또는 $k>0\cdots$ ㉠

(ii) $f(0)<0$ 에서 $k^2-1<0$

$\therefore -1<k<1\cdots$ ㉡

(iii) $f(4)>0$ 에서 $k^2-16k+15>0$

$\therefore k<1$ 또는 $k>15\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$0<k<1$

15. 좌표평면 위를 움직이는 두 점 $P(a+1,\ -3)$, $Q(3,\ -a+1)$ 에 대하여 P, Q 사이의 거리의 최솟값은?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ 2　　⑤ $\sqrt{5}$

해설

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \sqrt{(3-a-1)^2+(-a+1+3)^2} \\ &= \sqrt{(2-a)^2+(4-a)^2} \\ &= \sqrt{2a^2-12a+20} \\ &= \sqrt{2(a-3)^2+2}\end{aligned}$$

따라서, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $a=3$ 일 때, $\sqrt{2}$ 이다.

16. 두 점 $A(4,\ -2)$, $B(3,\ 5)$로부터 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $P(-2,\ -1)$ ② $P(-1,\ 0)$ ③ $P(0,\ 1)$

④ $P(1,\ 2)$ ⑤ $P(2,\ 3)$

해설

점 P의 좌표를 $P(0,\ b)$라고 하면

$$\overline{PA} = \sqrt{(0-4)^2 + (b+2)^2} = \sqrt{b^2 + 4b + 20}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(0-3)^2 + (b-5)^2} = \sqrt{b^2 - 10b + 34}$$

이 때, $\overline{PA} = \overline{PB}$이므로

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

$$b^2 + 4b + 20 = b^2 - 10b + 34$$

$$14b = 14$$

$$\therefore b = 1$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $P(0,\ 1)$

17. $\triangle$ABC에서 A$(6,\ 1)$, B$(-1,\ 2)$, C$(2,\ 3)$이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

외심을 P$(a,\ b)$라 하면

(1) $\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2+(b-1)^2 = (a+1)^2+(b-2)^2$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PC}}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2+(b-1)^2 = (a-2)^2+(b-3)^2$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡를 각각 전개하여 정리하면

$7a-b-16=0,\ 2a-b-6=0$

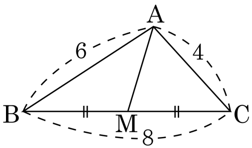
연립하여 풀면 $a=2,\ b=-2$

따라서 외심은 $(2,\ -2)$이다.

(2) $\overline{\mathrm{PA}}^2 = (2-6)^2+(-2-1)^2 = 25$

$\therefore \overline{\mathrm{PA}} = 5$

18. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$
$\therefore \overline{AM}^2=10$

19. 좌표평면 위의 네 점 $A(1,2)$, $P(0,b)$, $Q(a,0)$, $B(5,1)$에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값을 k라 할 때, k^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

점 A $(1,2)$의 y축에 대하여 대칭인 점을 $A'(-1,2)$, 점 $B(5,1)$의 x축에 대하여 대칭인 점을 $B'(5,-1)$이라 하면

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$

$\geq \overline{A'B'}=\sqrt{(5+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{45}$

따라서 $k=\sqrt{45}$이므로 $k^2=45$

20. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답 : ________ m

▷ 정답 : 30 m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

$\therefore\ a = 30(\mathrm{m})$