

1. 다음 중 명제가 아닌 것은?

① $4x + 1 < -x - 2$

② x 가 소수이면 x 는 홀수이다.

③ $x = -1$ 이면 $x + 4 = 3$ 이다.

④ 2의 배수는 4의 배수이다.

⑤ $xy = 0$ 이면 $x = 0$ 또는 $y = 0$ 이다.

해설

명제는 참과 거짓을 명확하게 판단할 수 있는 문장이나 식이다.

②, ④는 거짓 명제이고, ③, ⑤는 참인 명제이다.

①은 x 의 값에 따라서 참일 수도 있고 거짓일 수도 있으므로 명제가 아니다.

2. 다음 중 명제 ' $x + y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.' 가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x = 1, y = \frac{1}{2}$

② $x = 100, y = \frac{1}{2}$

③ $x = 1, y = 1$

④ $x = 2, y = 4$

⑤ $x = -1, y = -5$

해설

$x + y \geq 2, xy \geq 1$ 는 만족하지만, $x \geq 1, y \geq 1$ 은 만족하지 않는 반례를 찾는다.

$\therefore x = 100, y = \frac{1}{2}$ 일 때, 거짓이다.

3. $x > 0, y > 0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x} + \sqrt{y}, \sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2(x+y)}$

② $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$

③ $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2(x+y)}$

④ $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{2(x+y)}$

⑤ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2(x+y)}$

해설

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0, \sqrt{2(x+y)} > 0$$

$$\begin{aligned} \text{이 때 } (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \left\{ \sqrt{2(x+y)} \right\}^2 \\ &= (x + y + 2\sqrt{xy}) - (2x + 2y) \\ &= -(x - 2\sqrt{xy} + y) \\ &= -(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이므로 } (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 &\leq \left\{ \sqrt{2(x+y)} \right\}^2 \\ \therefore (\sqrt{x} + \sqrt{y}) &\leq \sqrt{2(x+y)} \\ (\text{단, 등호는 } \sqrt{x} &= \sqrt{y}, \text{ 즉 } x = y \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

4. 양수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 9$ 일 때 abc 의 최댓값은?

① 19

② 21

③ 23

④ 25

⑤ 27

해설

$$a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc} \text{에서 } 9 \geq 3 \sqrt[3]{abc}, \\ 3 \geq \sqrt[3]{abc}, \quad 27 \geq abc$$

5. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다.
 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

- ① $P \cup Q = U$
- ② $P \cap Q = \emptyset$
- ③ $Q \subset P$
- ④ $P \subset Q$
- ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 $P^c \subset Q^c \Leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$ 이 참이면 대우인 $q \rightarrow p$ 가 참
따라서 $Q \subset P$

6. 실수 x 에 대하여 $x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건이므로 명제 ‘ $x+1=0$ 이면 $x^2+2x+a=0$ 이다.’가 참이다.
 $x+1=0$ 에서 $x=-1$ 을 $x^2+2x+a=0$ 에 대입하면
 $(-1)^2+2\cdot(-1)+a=1-2+a=0$
 $\therefore a=1$

7. $x > y > 0$ 인 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y}$ 의 대소를 비교하면?

- ① $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$ ② $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$ ③ $\frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$
④ $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$ ⑤ $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$

해설

$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}$ 이라하면

$$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$$

$$= \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} > 0$$

따라서 $\therefore \frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$

8. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 않은 성질을 고르면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \end{aligned}$$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b, b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2 = a^2$

④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$$\begin{aligned} & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \text{ (③이 쓰임)} \\ &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \text{ (①이 쓰임)} \\ &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \text{ (④가 쓰임)} \\ &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \text{ (⑤가 쓰임)} \end{aligned}$$

따라서, ②는 쓰이지 않았다.

9. a, b 가 양수일 때, $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 4b\right)$ 의 최솟값을 구하면?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 4b\right) = 1 + 4ab + \frac{1}{ab} + 4$$

a, b 가 양수이므로, $ab > 0$

$$4ab + \frac{1}{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{4ab \cdot \frac{1}{ab}} = 4$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 4b\right) = 4ab + \frac{1}{ab} + 5 \geq 5 + 4 = 9$$

10. 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 일 때 $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 은?

① $M = 3, m = 0$

② $M = 3, m = -3$

③ $M = 6, m = 0$

④ $M = 6, m = -6$

⑤ $M = 6, m = -12$

해설

x, y, z 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $\{1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$
 $\geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$
 $36 \geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$
 $-6 \leq x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z \leq 6$
 $\therefore M = 6, m = -6$

11. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 할 때, ' p 또는 $\sim q$ '를 만족하는 집합을 구하면?

① $P - Q$

② $Q - P$

③ $P^c \cup Q$

④ $P \cup Q^c$

⑤ $P \cap Q^c$

해설

조건 $\sim q$ 를 만족하는 집합이 Q^c 이므로 ' p 또는 $\sim q$ '를 만족하는 집합은 $P \cup Q^c$ 이다.

12. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
' $xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

대우 : $x = 0, y = 0 \Rightarrow xy = 0$ (참)

13. 두 조건 $p : |x - 2| \leq h$, $q : |x + 1| \leq 7$ 에 대하여 ‘ p 이면 q 이다.’가 참이 되도록 하는 h 의 최댓값을 구하여라. (단, $h \geq 0$)

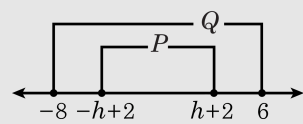
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$p : 2 - h \leq x \leq 2 + h$$

$$q : -8 \leq x \leq 6$$



$$-h + 2 \geq -8 \Leftrightarrow h \leq 10, h + 2 \leq 6 \Leftrightarrow h \leq 4$$

$$\therefore h \leq 4$$

$$\therefore n \text{의 최댓값은 } 4$$

14. 실수 x 에 대하여 명제 ' $ax^2 + a^2x - 6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.'가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

즉, ' $x = 2$ 이면 $ax^2 + a^2x - 6 = 0$ 이다.'가 참이므로

$$4a + 2a^2 - 6 = 0, \quad 2a^2 + 4a - 6 = 0,$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0, \quad (a + 3)(a - 1) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 1$$

따라서 a 의 값의 합은 $-3 + 1 = -2$

15. 실수 x 에 대하여 다음 명제가 참일 때, a 의 최솟값을 구하여라.

$$x > a \text{이면 } |x - 2| > 4$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 명제가 참이므로
대우 ‘ $|x - 2| \leq 4$ 이면 $x \leq a$ 이다.’ 가 참이다.
 $|x - 2| \leq 4$ 에서
 $-4 \leq x - 2 \leq 4, -2 \leq x \leq 6$ 이므로
 $\therefore a \geq 6$
따라서 a 의 최솟값은 6이다.

16. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 명제 $p \Rightarrow \sim q, q \Rightarrow r, s \Rightarrow q$ 일 때, 보기 중 참인 명제의 개수는?

㉠ $q \Rightarrow p$	㉡ $s \Rightarrow r$	㉢ $r \Rightarrow s$
㉤ $p \Rightarrow \sim s$	㉥ $q \Rightarrow \sim p$	㉦ $\sim r \Rightarrow \sim q$
㉧ $s \Rightarrow \sim p$		

- ① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

㉡, ㉤, ㉥, ㉦, ㉧이 참이다.
 $p \Rightarrow \sim q, q \Rightarrow r, s \Rightarrow q$ 이므로
그 각각의 대우도 참이다.
 $\therefore q \Rightarrow \sim p, \sim r \Rightarrow \sim q, \sim q \Rightarrow \sim s$
 $p \Rightarrow \sim q, \sim q \Rightarrow \sim s$ 이므로
 $\therefore p \Rightarrow \sim s, s \Rightarrow \sim p$
 $s \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로
 $\therefore s \Rightarrow r$

17. 다음 두 조건으로 알 수 있는 것은?

- ㉠ 어떤 사람은 안경을 끼지 않았다.

㉡ 여자는 모두 안경을 썼다.

- ① 남자는 모두 안경을 썼다.

② 안경을 끼지 않은 여자도 있다.

③ 여자는 모두 안경을 끼지 않았다.

④ 안경을 끼지 않은 남자도 있다.

⑤ 남자는 모두 안경을 끼지 않는다.

해설

안경을 낀 사람의 집합을 A , 여자의 집합을 B 라고 하면

㉠ $A^c \neq \phi$

㉡ $B \subset A \Rightarrow A^c \subset B^c$

안경을 쓰지 않는 사람은 여자가 아니다.

$\therefore$ 안경을 끼지 않은 남자도 있다.

18. x, y 가 실수일 때 세 명제 $p : xy = 0, q : |x| + |y| = 0, r : x + y = 0$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?
- ① p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
 - ② p 는 r 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
 - ③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
 - ④ q 는 p 이기 위한 필요조건이다.
 - ⑤ q 는 r 이기 위한 충분조건이다.

해설

$p : xy = 0 \rightarrow x = 0$ 또는 $y = 0$
 $q : |x| + |y| = 0 \rightarrow x = 0$ 그리고 $y = 0$
 $r : x + y = 0 \rightarrow x = -y$
 $\therefore q \rightarrow p$ { p 는 q 이기 위한 필요조건 }
 q 는 p 이기 위한 충분조건
 $q \rightarrow r$ { p 는 r 이기 위한 필요조건 }
 r 은 p 이기 위한 충분조건

20. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p, q 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여야.

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$

q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$

s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$

 q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$

따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$

$$\therefore p \Rightarrow q$$

그러나 $a \Rightarrow b$ 이지는 알 수 없다

그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.
 ∴ 이는 $\Rightarrow$ 이기 의한 충분조건이다.