

1. 다음 보기의 이차방정식 중에서 $x = 2$ 를 해로 갖는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $x^2 + 2x = 0$

㉡ $(x + 2)(x - 2) = 0$

㉢ $x^2 - 4x + 4 = 0$

㉣ $x^2 + 6x - 3 = 0$

㉤ $(x - 1)^2 = 1$

① ㉠, ㉢, ㉤

② ㉡, ㉢, ㉤

③ ㉡, ㉣, ㉤

④ ㉠, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x = 2$ 를 각 방정식에 대입해서 성립하는 것을 찾으면 ㉡, ㉢, ㉤이다.

2. 다음 두 이차방정식의 공통인 근을 고르면?

보기

$$(x+3)(x-2)=0, x^2+4x+3=0$$

① -2

② -3

③ -4

④ -5

⑤ -6

해설

$$(x+3)(x-2)=0$$

$$x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

$$x^2+4x+3=0$$

$$(x+3)(x+1)=0$$

$$x=-3 \text{ 또는 } x=-1$$

따라서 공통근은 -3 이다.

3. 다음에 주어진 이차방정식 중에서 중근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $x^2 - 4 = 0$

㉡ $x^2 = 8x - 16$

㉢ $(3x + 1)^2 = 1$

㉤ $x^2 = 0$

㉥ $(4x - 1)(x + 2) = 3x - 3$

① ㉠, ㉡, ㉢

② ㉡, ㉤

③ ㉠, ㉡, ㉥

④ ㉡, ㉥

⑤ ㉢, ㉤, ㉥

해설

중근을 갖는 이차방정식은 $(ax + b)^2 = 0$ 의 꼴이다.

㉡ $x^2 = 8x - 16 \leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \leftrightarrow (x - 4)^2 = 0$

$\therefore x = 4$ (중근)

㉤ $x^2 = 0$

$\therefore x = 0$ (중근)

㉥ $(4x - 1)(x + 2) = 3x - 3 \leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 0$

$(2x + 1)^2 = 0$

$\therefore x = -\frac{1}{2}$ (중근)

4. 다음 이차방정식 중에서 서로 다른 두 개의 근을 갖는 것은?

① $x^2 - 2x + 1 = 0$

② $x^2 - 6x + 9 = 0$

③ $x^2 + x + 2 = 0$

④ $x^2 - 4x + 5 = 0$

⑤ $x^2 - 3x + 1 = 0$

해설

① $D = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$: 중근

② $D = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$: 중근

③ $D = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 < 0$: 근이 없다.

④ $D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 < 0$: 근이 없다.

⑤ $D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0$: 서로 다른 두 근

5. 정사각형 모양의 화단의 가로를 4m 늘리고, 세로를 7m 줄였더니, 넓이는 26m^2 가 되었다. 처음 정사각형의 한 변의 길이는?

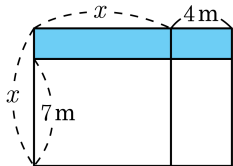
① 7 m

② 8 m

③ 9 m

④ 10 m

⑤ 11 m



해설

$$(x + 4)(x - 7) = 26$$

$$x^2 - 3x - 54 = 0$$

$$(x + 6)(x - 9) = 0$$

$$\therefore x = 9 (\because x > 0)$$

6. 이차방정식 $5x^2 - bx + 20 = 0$ 의 한 근을 a 라고 할 때, $5a^2 - ab + 1$ 의 값은?

① -20

② -19

③ -18

④ -17

⑤ -16

해설

$5x^2 - bx + 20 = 0$ 에 $x = a$ 를 대입하면

$$5a^2 - ab + 20 = 0, \quad 5a^2 - ab = -20$$

$$\therefore 5a^2 - ab + 1 = (-20) + 1 = -19$$

7. 다음 이차방정식의 두 근을 a, b 라고 할 때, $3a - 2b$ 의 값을 구하여라.
(단, $a > b$)

$$(2x - 3)^2 = (2x + 1)(x - 9) + 25$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

전개해서 정리하면

$$2x^2 + 5x - 7 = 0$$

$$(2x + 7)(x - 1) = 0$$

$$x = -\frac{7}{2} \text{ 또는 } 1$$

따라서 $a = 1, b = -\frac{7}{2}$ 이므로

$$3a - 2b = 3 \times 1 - 2 \times \left(-\frac{7}{2}\right) = 3 + 7 = 10 \text{ 이다.}$$

8. 이차방정식 $x^2 - 4x + k = 0$ 의 한 근이 $2 - \sqrt{3}$ 일 때, k 의 값과 다른 근을 구하면?

① $k = 0, 1 - \sqrt{3}$

② $k = 1, 2 + \sqrt{3}$

③ $k = 2, 1 + \sqrt{3}$

④ $k = 3, 1 - \sqrt{3}$

⑤ $k = 4, 2 + \sqrt{3}$

해설

한 근 $2 - \sqrt{3}$ 을 대입하여 k 를 구하면 $k = 1$

$x^2 - 4x + 1 = 0$ 에서 $x = 2 \pm \sqrt{3}$

따라서 다른 한 근은 $2 + \sqrt{3}$

9. 이차방정식 $2x^2 - 6x - 1 = 0$ 의 한 근을 A , $x^2 + 4x - 12 = 0$ 의 한 근을 B 라고 할 때, 다음을 구하여라.

$$A^2 - 3A + B^2 + 4B$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{25}{2}$

해설

$2x^2 - 6x - 1 = 0$ 의 한 근이 A 이므로

$$2A^2 - 6A - 1 = 0, 2A^2 - 6A = 1, A^2 - 3A = \frac{1}{2}$$

$x^2 + 4x - 12 = 0$ 의 한 근이 B 이므로

$$B^2 + 4B - 12 = 0, B^2 + 4B = 12$$

$$\therefore A^2 - 3A + B^2 + 4B = \frac{1}{2} + 12 = \frac{25}{2}$$

10. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 8x + 2a + 6 = 0$ 이 중근을 가질 때, 다음 중 a 의 값과 근을 구하면?

① $a = -3, x = 3$

② $a = 4, x = 4$

③ $a = -4, x = -3$

④ $a = 5, x = 4$

⑤ $a = 5, x = -2$

해설

$$x^2 - 8x + 2a + 6 = 0$$

$$(x - 4)^2 - 16 + 2a + 6 = 0$$

중근을 가지므로 $-10 + 2a = 0$ 이다.

$$\therefore a = 5$$

중근 $x = 4$ 이다.

11. 이차방정식 $(x-a)^2 = b(b \geq 0)$ 의 해가 $x = 8$ 또는 $x = -2$ 일 때, a, b 의 값을 구하여라.

① $a = -3, b = -25$

② $a = -3, b = 25$

③ $a = 3, b = -25$

④ $a = 3, b = 25$

⑤ $a = 3, b = 5$

해설

$$x - a = \pm \sqrt{b}$$

$$x = a \pm \sqrt{b}$$

$$a + \sqrt{b} = 8, a - \sqrt{b} = -2$$

두 식을 변끼리 더하면

$$2a = 6, a = 3$$

$$\sqrt{b} = 5, b = 25$$

$$\therefore a = 3, b = 25$$

12. 다음은 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 을 푸는 과정이다. ① ~ ⑤에 들어갈 식이 바르지 못한 것은?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \text{①} = -\frac{c}{a} + \text{①}$$

$$(x + \text{②})^2 = \text{③}$$

$$x = \text{④} \pm \text{⑤}$$

$$\text{①} \quad \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\text{④} \quad -\frac{b}{2a}$$

$$\text{②} \quad \frac{b}{2a}$$

$$\text{⑤} \quad \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{③} \quad \frac{b^2 - 4ac}{2a}$$

해설

$ax^2 + bx + c = 0 \leftarrow$ 양변을 a 로 나눈다.

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \leftarrow$ 양변에 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ 을 더한다.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\therefore$ ③이 잘못되었다.

13. 오징어와 문어를 파는 가게가 있다. 이 가게에서 하루 동안 팔린 오징어의 수는 문어의 수보다 3 마리 더 많고 오징어의 수와 문어의 수의 곱은 154 마리이다. 하루 동안 팔린 문어의 수를 구하여라.

▶ 답: 마리

▷ 정답: 11 마리

해설

오징어와 문어의 수를 $x + 3$, x 마리라고 하면,

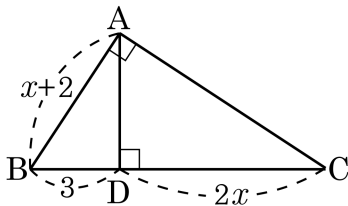
$$(x + 3)x = 154$$

$$x^2 + 3x - 154 = 0$$

$$(x - 11)(x + 14) = 0$$

$$\therefore x = 11 (\because x > 0)$$

14. 다음 그림에서 $\triangle ABC$ 는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.



점 D가 점 A에서 변 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발일 때, x 의 값은?

① $1 + \sqrt{3}$

② $1 + \sqrt{5}$

③ $1 + \sqrt{6}$

④ $2 + \sqrt{3}$

⑤ $2 + \sqrt{6}$

해설

$$(x+2)^2 = 3 \cdot (3+2x)$$

$$x^2 + 4x + 4 = 9 + 6x$$

$$x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$x = 1 + \sqrt{6} (\because x > 0)$$

15. 부등식 $4 \leq 3x - 2 < 8$ 을 만족하는 두 자연수가 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 근일 때, $\frac{a+b}{ab}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{11}{30}$

해설

부등식 $4 \leq 3x - 2 < 8$ 을 풀면 다음과 같다.

$$6 \leq 3x < 10$$

$$2 \leq x < \frac{10}{3}$$

$$\therefore x = 2, 3$$

이 두 자연수를 근으로 가지므로 이를 이차방정식에 대입하여 풀면

$$a = 5, b = 6$$

$$\therefore \frac{a+b}{ab} = \frac{11}{30}$$

16. $x(x-3) = 0$ 을 $(ax+b)^2 = q$ 의 꼴로 바꾸었을 때, abq 의 값을 구하면?

① $\frac{27}{8}$

② $-\frac{27}{8}$

③ $-\frac{25}{8}$

④ $\frac{25}{8}$

⑤ $\frac{23}{8}$

해설

$$x(x-3) = 0$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$a = 1, b = -\frac{3}{2}, q = \frac{9}{4}$$

$$\therefore abq = -\frac{27}{8}$$

17. 이차방정식 $2x^2 - 4x - 3 = 0$ 을 완전제곱식으로 풀고 두 근 중에서 작은 근을 m , 큰 근을 n 이라 할 때, $a < m < a + 1$, $b < n < b + 1$ 을 만족하는 정수 a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

양변을 2 로 나누면 $x^2 - 2x - \frac{3}{2} = 0$ 이고 $x^2 - 2x = \frac{3}{2}$, 양변에 1 을 더하면

$$x^2 - 2x + 1 = \frac{3}{2} + 1, (x - 1)^2 = \frac{5}{2}, x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2} \text{ 이다.}$$

작은 근 $\frac{2 - \sqrt{10}}{2} = m$ 이고, $-1 < m < 0$ 이므로 $a = -1$ 이다.

큰 근 $\frac{2 + \sqrt{10}}{2} = n$ 이고, $2 < n < 3$ 이므로 $b = 2$ 이다.

따라서 $a = -1, b = 2$ 이다.

18. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$ 의 근에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $k = -6$ 이면 근이 2 개이다.
- ② $k = -1$ 이면 정수인 근을 갖는다.
- ③ $k = 0$ 이면 무리수인 근을 갖는다.
- ④ $k = 2$ 이면 근이 1 개이다.
- ⑤ $k = 4$ 이면 근이 없다.

해설

$$(x-1)^2 = 3-k, \quad x-1 = \pm\sqrt{3-k}$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3-k}$$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0 개

$k = 3$: 근이 1 개

$3 < k$: 근이 2 개

19. 두 이차방정식 $x^2 - 12x + a = 0$, $(x - b)^2 = 0$ 의 근이 같고 근의 개수는 1개일 때, $a + b$ 의 값은?

① 6

② 12

③ 24

④ 36

⑤ 42

해설

$x^2 - 12x + a = 0$ 은 중근을 가지고, $(x - b)^2 = 0$ 도 같은 근을 가진다.

따라서 $a = 36$, $b = 6$ 이므로
 $a + b = 42$ 이다.

20. 세 자리 자연수가 있다 각 자리의 수의 합은 10 이고, 가운데 자리의 수의 4배는 다른 두 자리의 수의 합과 같다.
또, 이 자연수의 각 자리의 수를 거꾸로 늘어놓아 얻은 자연수는 처음 자연수보다 198 만큼 크다. 처음 자연수는?

① 235

② 325

③ 532

④ 523

⑤ 358

해설

일, 십, 백의 자리의 수를 각각 p , q , r 라 하면
 p , q 는 0 이상 10 미만의 정수이고
 r 은 1 이상 10 미만의 자연수이다.

$$\begin{cases} p + q + r = 10 \cdots \textcircled{㉠} \\ 4q = p + r \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서 $q = 2$

$$100p + 20 + r = 100r + 20 + p + 198$$

$$p - r = 2 \cdots \textcircled{㉢}$$

$q = 2$ 를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면 $p + r = 8 \cdots \textcircled{㉣}$

$\textcircled{㉢} + \textcircled{㉣}$ 에서 $p = 5$, $r = 3$

따라서 구하는 수는 325이다.

21. 이차방정식 $x^2 - 6x + 1 + a = 0$ 이 유리수 근을 가질 때, 자연수 a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 7

▷ 정답 : 8

해설

근의 공식에 의해 x 를 구하면

$$x = 3 \pm \sqrt{9 - (1 + a)}$$

x 가 유리수가 되려면 a 가 자연수이므로 $9 - (1 + a)$ 는 8 보다 작은 제곱수가 되어야 한다.

$$9 - (1 + a) = 8 - a \text{ 이므로}$$

a 의 값은 4, 7, 8이다.

22. 5 보다 큰 실수 a 가 $a(10-a) + \frac{1}{a} + \frac{1}{10-a} = 7$ 을 만족할 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $5 + \sqrt{23}$

▷ 정답 : $5 + 2\sqrt{5}$

해설

$10 - a = b$ 라 하면 $a + b = 10$ 이므로

$$ab + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 7$$

$$ab + \frac{a+b}{ab} = ab + \frac{10}{ab} = 7$$

양변에 ab 를 곱하면

$$(ab)^2 - 7ab + 10 = 0$$

$$(ab - 2)(ab - 5) = 0$$

$$\therefore ab = 2 \text{ 또는 } ab = 5$$

i) $ab = 2$ 일 때 $a + b = 10$,

$ab = 2$ 에서 a, b 는 $m^2 - 10m + 2 = 0$ 의 두 근이다.

$$\therefore m = 5 \pm \sqrt{23}$$

그런데 a 가 5 보다 큰 실수이므로 $a = 5 + \sqrt{23}$ 이다.

ii) $ab = 5$ 일 때 $a + b = 10$,

$ab = 5$ 에서 a, b 는 $n^2 - 10n + 5 = 0$ 의 두 근이다.

$$\therefore n = 5 \pm 2\sqrt{5}$$

그런데 a 가 5 보다 큰 실수이므로 $a = 5 + 2\sqrt{5}$ 이다.

따라서 i), ii) 에 의하여 $a = 5 + \sqrt{23}$ 또는 $a = 5 + 2\sqrt{5}$ 이다.

23. $x = 5 + 4\sqrt{3}$, $y = a - 2\sqrt{3}$ 일 때, $x^2 + 4y^2 + 4xy + 4x + 8y = 5$ 를 만족시키는 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$$x^2 + 4y^2 + 4xy + 4x + 8y = 5$$

$$(x + 2y)^2 + 4(x + 2y) - 5 = 0$$

$$(x + 2y - 1)(x + 2y + 5) = 0$$

$$x + 2y = 1 \text{ 또는 } x + 2y = -5$$

$$(i) \ x + 2y = 1 \text{ 일 때}$$

$$(5 + 4\sqrt{3}) + 2(a - 2\sqrt{3}) = 1$$

$$5 + 2a = 1$$

$$\therefore a = -2$$

$$(ii) \ x + 2y = -5 \text{ 일 때}$$

$$5 + 2a = -5$$

$$\therefore a = -5$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a = -2 \text{ 또는 } a = -5$$

$$\therefore -2 - 5 = -7$$

24. 이차방정식 $4x^2 - 8ax + 8a - 3b = 0$ 의 두 근이 일치할 때, a, b 의 값과 그 근의 합을 구하여라.
(단, a 는 $a \geq 1$ 인 유리수, b 는 양의 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

중근을 갖는 것이므로,

$$(4a)^2 - 4(8a - 3b) = 0, \quad 4a^2 - 8a + 3b = 0$$

$$\Rightarrow 4(a-1)^2 = 4 - 3b, \quad 4 - 3b \geq 0$$

따라서 b 는 양의 정수이므로 $b = 1$ 이다.

또한, $a \geq 1$ 이므로 $a = \frac{3}{2}$ 이다.

$$\therefore x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a + b + x = \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 4$$

25. 민정이는 거리가 500m 인 A 코스로 분당 V m 의 속력으로 산을 오르는데 $(t + 10)$ 분이 걸렸다. 다시 산을 내려올 때는 거리가 600m 인 B 코스로 분당 $(v + 10)$ m 의 속력으로 $(t - 10)$ 분 걸려서 내려왔다. 이때, v 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

민정이가 A 코스로 산을 오를 때 분당 v m 의 속력으로 $(t + 10)$ 분이 걸렸으므로

$$v(t + 10) = 500$$

$$vt + 10v = 500, vt = 500 - 10v \cdots \textcircled{㉠}$$

또한, B 코스로 산을 내려올 때 분당 $(v + 10)$ m 로 일정하게 움직여 $(t - 10)$ 분이 걸렸으므로

$$(v + 10)(t - 10) = 600$$

$$vt + 10t - 10v - 100 = 600 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠식을 ㉡식에 대입하여 정리하면

$$t = 2v + 20 \cdots \textcircled{㉢}$$

㉢식을 ㉠식에 대입하여 정리하면

$$v^2 + 15v - 250 = 0$$

$$\therefore v = 10 \text{ 또는 } v = -25$$

이때, $v > 0$ 이므로 분당 10m 이다.