1. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ 일 때, $f\left(\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\right) + f\left(\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f\left(\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\right) + f\left(\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$
$= f(i^2) + f((-i)^2)$
$= f(-1) + f(-1)$
$= 0$

2. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{50}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{50}$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-i$ ② 0 ③ i ④ $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ⑤ $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

해설

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}=i$

$\therefore\ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{50}=(i)^{25}$

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2}=-i$

$\therefore\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{50}=(-i)^{25}=-(i)^{25}$

$\therefore\ i^{25}+(-i^{25})=0$

3. 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ 으로 정의할 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2014)$ 의 값은?

① -2014 ② -2 ③ 0

④ 2 ⑤ 2014

해설

$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$

$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$ 이므로

$f(n) = (-i)^n + (i)^n$

$f(1) = (-i)^1 + i^1 = 0$

$f(2) = (-i)^2 + i^2 = -2$

$f(3) = (-i)^3 + i^3 = 0$

$f(4) = (-i)^4 + i^4 = 2$

$2014 = 4 \times 503 + 2$ 이므로

$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2014)$

$= 503 \times (0 - 2 + 0 + 2) + 0 - 2 = -2$

4. 자연수 n에 대하여 $1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$ 의 값을 모두 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $1-i$

▷ 정답: 1

해설

$\frac{1}{i}=-i$, $\left(\frac{1}{i}\right)^3=i$

i) $n=2k$일 때,

$1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$

$=1-i+i-i+\cdots+i=1$

ii) $n=2k-1$일 때

$1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$

$=1-i+i-i+\cdots-i$

$=1-i$

5. 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$과 다음과 같다고 하자.

$$f(n) \begin{cases} i^{n+1}(n = 4k) \\ -i^{n}(n = 4k+1)(\text{단,k는정수}) \\ 2i(n = 4k+2) \\ -i(n = 4k+3) \end{cases}$$

(단,k 는 정수) 이 때, $f(1) + f(2) + \cdot \cdot \cdot + f(2005)$ 를 구하면?

① i　　② $-i$　　③ 0　　④ $500i$　　⑤ $501i$

해설

$n = 4k \Rightarrow f(n) = {}^{4k+1} = i$

$n = 4k+1 \;\Rightarrow\; f(n) = -i^{4k+1} = -i$

$n = 4k+2 \;\Rightarrow\; f(n) = 2\pi$

$n = 4k+3 \;\Rightarrow\; f(n) = -i$

$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = -i + 2i - i + i = i$

계속 반복되므로

$f(1) + f(2) + \cdots + f(2005)$

$= i \times 501 + f(2005)$

$= 501i - i = 500i$

6. 10 이하의 자연수 n에 대해, $\dfrac{(1+i)^{2n}}{2^n} = -1$ 을 만족하는 모든 n의 총합은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 10　　② 12　　③ 14　　④ 16　　⑤ 18

해설

$$\frac{(1+i)^{2n}}{2^n} = \frac{\{(1+i)^2\}^n}{2^n} = \left(\frac{2i}{2}\right)^n = i^n$$

$i^n = -1$이므로 $n = 4k+2(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

n이 10 이하의 자연수이므로 $n = 2, 6, 10$

$\therefore\ 2+6+10 = 18$

7. 정수 n에 대해 $z = i^n + i^{-n}, i = \sqrt{-1}$을 만족하는 z의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개

④ 4개 ⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1,
$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i$, $i^n = -1$ 이면
$i^{-n} = -1$, $i^n = -i$ 이면
$i^{-n} = i$, $i^n = 1$ 이면
$i^{-n} = 1$
$\therefore\ i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$
$\therefore$ z는 3개다.

8. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{50}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\frac{1+i}{1-i}=i,\ \frac{1-i}{1+i}=-i$

$\therefore$ (준식) $=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}$

$=(-i)^{50}+(i)^{50}$

$=(-i)^{2}+(i)^{2}$

$=-2$

9. $A(n) = i^n + (-1)^n n,\ f(n) = A(1) + A(2) + \cdots + A(n)$이라 할 때, $f(10)+f(11)+f(12)+f(13)$의 값은? (단, n은 자연수이고 $i = \sqrt{-1}$이다.)

① $2i-2$ ② $2i+2$ ③ $2i-4$
④ $2i+4$ ⑤ $4i-2$

해설

$$
\begin{aligned}
f(10) &= (i-1) + (i^2+2) + (i^3-3) + \cdots + (i^{10}+10) \\
&= (i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{10}) \\
&\quad + (-1 + 2 - 3 + \cdots + 10) \\
&= (i-1) + (1+1+1+1+1) \\
&= i+4 \\
f(11) &= f(10) + i^{11} - 11 \\
&= (i+4) + (-i-11) = -7 \\
f(12) &= f(11) + i^{12} + 12 \\
&= -7 + (1+12) = 6 \\
f(13) &= f(12) + i^{13} - 13 \\
&= 6 + (i-13) = i-7
\end{aligned}
$$

$\therefore f(10) + f(11) + f(12) + f(13)$
$= (i+4) + (-7) + 6 + (i-7) = 2i-4$

10. $f(n) = (n+1)i^n - ni^{n+1}$ 이라고 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, n 은 자연수이고, $i^2 = -1$ 이다.)

① $f(n+1) - f(n)$ 은 실수이다.

② $f(n+1) - f(n)$ 은 순허수이다.

③ $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + f(n+3)$ 은 실수이다.

④ $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + f(n+3)$ 은 순허수이다.

⑤ $f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$ 은 순허수이다.

해설

k가 정수일 때 $i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i$,
$i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$이므로
$f(1) = 2i + 1$,$f(2) = -3 + 2i$, $f(3) = -4i - 3$, $f(4) = 5 - 4i$
$f(5) = 6i + 5$,$f(6) = -7 + 6i$, $f(7) = -8i - 7$,$f(8) = 9 - 8i$
① $f(3) - f(2) = -6i$ (거짓)
② $f(2) - f(1) = -4$ (거짓)
③ $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = -4i$ (거짓)
④ $f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 4$ (거짓)
⑤ $f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$

$$= \{f(1) + f(2) + f(3) + f(4)\} + \{f(5) + f(6) + f(7) + f(8)\} = -4i - 4i = -8i \text{ (참)}$$