

1. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ 일 때, $f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right) + f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned} & f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right) + f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right) \\ &= f(i^2) + f((-i)^2) \\ &= f(-1) + f(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{50} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{50}$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-i$

② 0

③ i

④ $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

⑤ $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

해설

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$$

$$\therefore \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{50} = (i)^{25}$$

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = -i$$

$$\therefore \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{50} = (-i)^{25} = -(i)^{25}$$

$$\therefore i^{25} + (-i^{25}) = 0$$

3. 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ 으로 정의할 때,
 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2014)$ 의 값은?

① -2014

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 2014

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \text{ 이므로}$$

$$f(n) = (-i)^n + (i)^n$$

$$f(1) = (-i)^1 + i^1 = 0$$

$$f(2) = (-i)^2 + i^2 = -2$$

$$f(3) = (-i)^3 + i^3 = 0$$

$$f(4) = (-i)^4 + i^4 = 2$$

$$2014 = 4 \times 503 + 2 \text{ 이므로}$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2014)$$

$$= 503 \times (0 - 2 + 0 + 2) + 0 - 2 = -2$$

4. 자연수 n 에 대하여 $1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$ 의 값을 모두 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $1 - i$

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{1}{i} = -i, \quad \left(\frac{1}{i}\right)^3 = i$$

i) $n = 2k$ 일 때,

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1} \\ &= 1 - i + i - i + \cdots + i = 1 \end{aligned}$$

ii) $n = 2k - 1$ 일 때

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1} \\ &= 1 - i + i - i + \cdots - i \\ &= 1 - i \end{aligned}$$

5. 자연수 n 에 대하여 함수 $f(n)$ 과 다음과 같다고 하자.

$$f(n) = \begin{cases} i^{n+1} (n = 4k) \\ -i^n (n = 4k + 1) \text{ (단, } k \text{는 정수)} \\ 2i (n = 4k + 2) \\ -i (n = 4k + 3) \end{cases}$$

(단, k 는 정수)이 때, $f(1) + f(2) + \cdots + f(2005)$ 를 구하면?

① i

② $-i$

③ 0

④ $500i$

⑤ $501i$

해설

$$n = 4k \Rightarrow f(n) = i^{4k+1} = i$$

$$n = 4k + 1 \Rightarrow f(n) = -i^{4k+1} = -i$$

$$n = 4k + 2 \Rightarrow f(n) = 2i$$

$$n = 4k + 3 \Rightarrow f(n) = -i$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = -i + 2i - i + i = i$$

계속 반복되므로

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(2005)$$

$$= i \times 501 + f(2005)$$

$$= 501i - i = 500i$$

6. 10 이하의 자연수 n 에 대해, $\frac{(1+i)^{2n}}{2^n} = -1$ 을 만족하는 모든 n 의 총합은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 10

② 12

③ 14

④ 16

⑤ 18

해설

$$\frac{(1+i)^{2n}}{2^n} = \frac{\{(1+i)^2\}^n}{2^n} = \left(\frac{2i}{2}\right)^n = i^n$$

$i^n = -1$ 이므로 $n = 4k + 2 (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$

n 이 10 이하의 자연수이므로 $n = 2, 6, 10$

$$\therefore 2 + 6 + 10 = 18$$

7. 정수 n 에 대해 $z = i^n + i^{-n}$, $i = \sqrt{-1}$ 을 만족하는 z 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1 ,

$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i$, $i^n = -1$ 이면

$i^{-n} = -1$, $i^n = -i$ 이면

$i^{-n} = i$, $i^n = 1$ 이면

$i^{-n} = 1$

$\therefore i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$

$\therefore z$ 는 3개다.

8. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{50}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i, \quad \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50} \\ &= (-i)^{50} + (i)^{50} \\ &= (-i)^2 + (i)^2 \\ &= -2\end{aligned}$$

9. $A(n) = i^n + (-1)^n n$, $f(n) = A(1) + A(2) + \cdots + A(n)$ 이라 할 때, $f(10) + f(11) + f(12) + f(13)$ 의 값은? (단, n 은 자연수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $2i - 2$

② $2i + 2$

③ $2i - 4$

④ $2i + 4$

⑤ $4i - 2$

해설

$$\begin{aligned} f(10) &= (i-1) + (i^2+2) + (i^3-3) + \cdots + (i^{10}+10) \\ &= (i+i^2+i^3+\cdots+i^{10}) \\ &\quad + (-1+2-3+\cdots+10) \\ &= (i-1) + (1+1+1+1+1) \\ &= i+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(11) &= f(10) + i^{11} - 11 \\ &= (i+4) + (-i-11) = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(12) &= f(11) + i^{12} + 12 \\ &= -7 + (1+12) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(13) &= f(12) + i^{13} - 13 \\ &= 6 + (i-13) = i-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(10) + f(11) + f(12) + f(13) \\ &= (i+4) + (-7) + 6 + (i-7) = 2i-4 \end{aligned}$$

10. $f(n) = (n+1)i^n - ni^{n+1}$ 이라고 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, n 은 자연수이고, $i^2 = -1$ 이다.)

① $f(n+1) - f(n)$ 은 실수이다.

② $f(n+1) - f(n)$ 은 순허수이다.

③ $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + f(n+3)$ 은 실수이다.

④ $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + f(n+3)$ 은 순허수이다.

⑤ $f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$ 은 순허수이다.

해설

k 가 정수일 때 $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$,

$i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$ 이므로

$f(1) = 2i + 1$, $f(2) = -3 + 2i$, $f(3) = -4i - 3$, $f(4) = 5 - 4i$

$f(5) = 6i + 5$, $f(6) = -7 + 6i$, $f(7) = -8i - 7$, $f(8) = 9 - 8i$

① $f(3) - f(2) = -6i$ (거짓)

② $f(2) - f(1) = -4$ (거짓)

③ $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = -4i$ (거짓)

④ $f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 4$ (거짓)

⑤ $f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$

$= \{f(1) + f(2) + f(3) + f(4)\}$

$+ \{f(5) + f(6) + f(7) + f(8)\}$

$= -4i - 4i = -8i$ (참)