

1. x 가 $x-5 \leq -2(x-2)$ 인 자연수일 때, 이차방정식 $x^2-4x+3=0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

▷ 정답 : $x=3$

해설

$$x-5 \leq -2(x-2) \quad \therefore x \leq 3$$

x 는 1, 2, 3이다.

$$x=1 \text{ 일 때, } 1^2-4 \cdot 1+3=0$$

$$x=2 \text{ 일 때, } 2^2-4 \cdot 2+3 \neq 0$$

$$x=3 \text{ 일 때, } 3^2-4 \cdot 3+3=0$$

따라서 구하는 해는 $x=1$ 또는 $x=3$ 이다.

2. 부등식 $2 \leq 2x - 2 < 5$ 를 만족시키는 두 자연수가 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근일 때, $a^2 - b^2$ 의 값은?

① 61 ② 51 ③ 11 ④ -11 ⑤ -61

해설

부등식 $2 \leq 2x - 2 < 5$ 를 풀면 다음과 같다.

$$4 \leq 2x < 7$$

$$2 \leq x < \frac{7}{2}$$

$$\therefore x = 2, 3$$

이 두 자연수를 근으로 가지므로 이를 이차방정식에 대입하여 풀면

$$a = -5, b = 6$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (-5)^2 - 6^2 = 25 - 36 = -11$$

3. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 2a - 3 = 0$ 의 한 근이 a 일 때, a 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 6

해설

$x = a$ 를 대입하면 $a^2 - a^2 + 2a - 3 = 0$

$2a - 3 = 0, a = \frac{3}{2}$

4. 이차방정식 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 의 두 근을 a, b 라고 할 때, 다음 중 $a+2, b+2$ 를 두 근으로 갖는 이차항의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2 - 2x - 35 = 0$

② $x^2 + 2x - 35 = 0$

③ $x^2 - 12x + 35 = 0$

④ $x^2 + 12x + 35 = 0$

⑤ $x^2 - 4x - 30 = 0$

해설

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x - 5)(x - 3) = 0$$

$$a = 5, b = 3$$

$$\therefore a + 2 = 7, b + 2 = 5$$

따라서 5, 7을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$(x - 7)(x - 5) = 0$$

$$\therefore x^2 - 12x + 35 = 0$$

5. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 3 = 0$ 의 해가 $a, 1$ 일 때, $p + a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$x^2 - px + 2p + 3 = 0$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $p = -4$

$x^2 - px + 2p + 3 = 0$ 에 $p = -4$ 를 대입하면

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x - 1)(x + 5) = 0$$

$$x = -5 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\therefore a = -5$$

$$\therefore p + a = -4 - 5 = -9$$

6. $x^2 - 3x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x - 3 + \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\begin{aligned} x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 9 - 2 + 3 = 10 \end{aligned}$$

7. 두 이차방정식 $x^2 - 10x + a = 0$, $x^2 + b = 0$ 의 공통인 해가 3일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

주어진 식에 x 대신 3을 대입하면

$$3^2 - 10 \times 3 + a = 0 \quad \therefore a = 21$$

$$3^2 + b = 0 \quad \therefore b = -9$$

$$\therefore a + b = 21 - 9 = 12$$

8. 이차방정식 $x^2+ax+a-1=0$ 이 중근을 갖기 위한 a 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 4

⑤ 8

해설

중근을 가지려면 $x^2+ax+a-1$ 가 완전제곱식이 되어야 한다.

$$\therefore \left(a \times \frac{1}{2}\right)^2 = a-1, \frac{a^2}{4} = a-1$$

$$a^2-4a+4=0, (a-2)^2=0$$

$$\therefore a=2$$

9. 이차방정식 $x^2 + 4x + A = 0$ 의 근이 $x = B \pm \sqrt{3}$ 일 때, $A - B$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$x^2 + 4x + 4 = -A + 4$$

$$(x + 2)^2 = -A + 4$$

$$\therefore x = -2 \pm \sqrt{-A + 4}$$

$$B = -2, -A + 4 = 3, A = 1$$

$$\therefore A - B = 1 + 2 = 3$$

10. 이차방정식 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 을 $(x - a)^2 = b$ 의 꼴로 변형할 때, a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = \frac{3}{2}$ 또는 1.5

▷ 정답 : $b = \frac{17}{4}$ 또는 4.25

해설

$$x^2 - 3x = 2$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = \frac{17}{4}$$

11. 완전제곱식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀 때, 근으로 알맞은 것은?

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

① $2 \pm \sqrt{2}$

② $3 \pm \sqrt{2}$

③ $3 \pm \sqrt{3}$

④ $2 \pm \sqrt{3}$

⑤ $4 \pm \sqrt{2}$

해설

$$x^2 - 4x = -2, x^2 - 4x + 4 = -2 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 2$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{2}$$

12. x 에 대한 이차방정식 $(x-p)^2 = q$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ $q = 0$ 이면 중근이다.
- ㉡ $q < 0$ 이면 실수 범위 내에서 근은 없다.
- ㉢ $p = 0, q > 0$ 이면 두 근의 합은 항상 0이다.
- ㉤ $q > 0$ 이면 두 근의 절댓값은 같고 부호가 서로 반대이다.

- ① ㉠, ㉡, ㉢
- ② ㉠, ㉡, ㉤
- ③ ㉠, ㉢, ㉤
- ④ ㉡, ㉢, ㉤
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$(x-p)^2 = q$, $x-p = \pm \sqrt{q}$ 이므로 $x = p \pm \sqrt{q}$
㉠ $q = 0$ 이면 $x = p$ (중근)이므로 참이다.
㉡ $q < 0$ 이면 근호 안이 음이 되어 실수가 아니므로 참이다.
㉢ $p = 0, q > 0$ 이면 $x = \pm \sqrt{q}$ 이므로 두 근의 합은 항상 0이다. 따라서 참이다.
㉤ $q > 0$ 이면 $x = p \pm \sqrt{q}$, 두 근의 절댓값이 같지 않다. 따라서 거짓이다.

13. 다음은 이차방정식의 해를 구한 것이다. 옳지 않은 것은?

- ① $x^2 - 4x + 1 = 0$, $x = 2 \pm \sqrt{3}$
② $3x^2 + 7x - 5 = 0$, $x = \frac{-7 \pm \sqrt{109}}{6}$
③ $4x^2 - 5x - 3 = 0$, $x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{8}$
④ $3x^2 + 2x - 4 = 0$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}$
⑤ $3x^2 - 6x + 2 = 0$, $x = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{6}$

해설

⑤ $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$

14. $[x]$ 는 자연수 x 의 양의 약수의 개수를 나타낼 때, $[x]^2 - [x] - 2 = 0$ 을 만족시키는 자연수 x 중에서 20 이하인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 8개

해설

$$[x]^2 - [x] - 2 = ([x] - 2)([x] + 1) = 0$$

$$\therefore [x] = 2 \text{ 또는 } [x] = -1$$

그런데, $[x] \neq -1$ 이므로 $[x] = 2$

양의 약수가 2개인 것은 소수이므로,

20 이하의 소수를 구하면

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 이다.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 이다.

∴ 8 개

15. $\frac{5y-2}{2x} + \frac{x-2}{y} + \frac{5}{2xy} - 2 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 값을 구하여라.(단, $x^2 + y^2 \neq 0$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $y = 1$

해설

$\frac{5y-2}{2x} + \frac{x-2}{y} + \frac{5}{2xy} - 2 = 0$ 에서 양변에 $2xy$ 를 곱하여 정리하면
 $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$
이 식을 $(\quad)^2 + (\quad)^2 + (\quad)^2 = 0$ 의 꼴로 고치면
 $x^2 - 4xy + 4y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 0$
 $(x-2y)^2 + (x-2)^2 + (y-1)^2 = 0$
따라서 $x = 2, y = 1$ 이다.

16. $x = 5 + 4\sqrt{3}$, $y = a - 2\sqrt{3}$ 일 때, $x^2 + 4y^2 + 4xy + 4x + 8y = 5$ 를 만족시키는 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$$\begin{aligned}x^2 + 4y^2 + 4xy + 4x + 8y &= 5 \\(x + 2y)^2 + 4(x + 2y) - 5 &= 0 \\(x + 2y - 1)(x + 2y + 5) &= 0 \\x + 2y = 1 \text{ 또는 } x + 2y &= -5 \\(\text{i}) \ x + 2y = 1 \text{ 일 때} \\(5 + 4\sqrt{3}) + 2(a - 2\sqrt{3}) &= 1 \\5 + 2a &= 1 \\\therefore a &= -2 \\(\text{ii}) \ x + 2y = -5 \text{ 일 때} \\5 + 2a &= -5 \\\therefore a &= -5 \\(\text{i}), (\text{ii}) \text{에서 } a = -2 \text{ 또는 } a = -5 \\\therefore -2 - 5 &= -7\end{aligned}$$

17. $2x^2 - 8x - k = 0$ 이 중근을 가질 때, $3x^2 - (1 - k)x + 3 = 0$ 의 근을 구하면?

① $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

② $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

③ $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$

④ $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{3}$

⑤ $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{3}$

해설

$2x^2 - 8x - k = 0$ 이 중근을 가지려면

$$D = (-8)^2 + 4 \times 2 \times k = 0, \quad k = -8$$

$3x^2 - (1 - k)x + 3 = 0$ 에 $k = -8$ 을 대입하면

$$3x^2 - 9x + 3 = 0$$

$$\therefore x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 36}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

18. 다음 이차방정식 $2x^2 - 4x + k = 0$ 에 대하여 다음 설명 중 알맞은 것을 모두 고른 것은?

- ㉠ $k = 2$ 이면 $x = 1$ 인 증근을 갖는다.

㉡ $k = 0$ 이면 두 근의 곱은 0 이다.

㉢ $k = -6$ 이면 두 근의 합은 2 이다.

㉤ $k < 2$ 이면 근이 없다.

- ① ㉢, ㉤

② ㉠, ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉤

해설

㉠ $k = 2$ 일 때 $2x^2 - 4x + 2 = 0$
 $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0 \therefore x = 1$ (증근)

㉡ $k = 0$ 일 때 $2x^2 - 4x = 0$
 $x^2 - 2x = x(x - 2) = 0 \therefore x = 0, 2$ 이므로 두 근의 곱은 0

㉢ $k = -6$ 일 때 $2x^2 - 4x - 6 = 0$
 $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$
 $x = 3, -1$ 이므로 두 근의 합은 2

㉤ $D/4 = 4 - 2k$ 에서 $4 - 2k > 0$
 $k < 2$ 일 때 서로 다른 두 근을 가진다.
 $\therefore$ 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢

19. 선물 가게에 원가가 1000원인 물건이 있다. 원가의 $a\%$ 의 이익을 붙여서 정가를 정하였다가 할인 기간에 정가의 $2a\%$ 를 할인하여 팔았더니 120원의 손해를 보았다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

원가 : 1000원

정가 : $1000 \times \left(1 + \frac{a}{100}\right)$ 원

$$1000 \times \left(1 + \frac{a}{100}\right) \times \left(1 - \frac{2a}{100}\right) + 120 = 1000$$

$$-10a - \frac{1}{5}a^2 + 1000 + 120 = 1000$$

$$a^2 + 50a - 600 = 0$$

$$(a + 60)(a - 10) = 0$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 10$$

20. 다음 식의 값을 구하여라.

$$2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} + \cdots}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 식을 x 라 하면

$$x = 2 + \sqrt{x}, \sqrt{x} > 0 \text{ 이므로 } x > 2$$

$x - 2 = \sqrt{x}$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2 - 4x + 4 = x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

$$\therefore x > 2 \text{ 이므로 } x = 4$$

21. A 가 가진 구슬의 수는 B 가 가진 구슬의 수보다 3개 더 많고, B 가 가진 구슬의 수의 제곱은 A 가 가진 구슬의 수의 5배보다 9개가 더 많다. A 가 가진 구슬의 수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 11 개

해설

A와 B가 가진 구슬의 수를 각각 x , $x-3$ 이라 하면

$$5x + 9 = (x - 3)^2$$

$$x^2 - 11x = 0$$

$$x(x - 11) = 0$$

$x > 0$ 이므로 $x = 11$ (개)

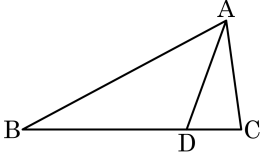
22. 땅으로부터 높이 15m 되는 다이빙대에서 수영선수가 위를 향해 초속 27m 로 다이빙을 했다. x 초 후 수영선수가 지상으로부터의 떨어져있는 높이는 $(-3x^2 + 27x + 15)$ m 라고 할 때, 수영선수의 높이가 57m 가 되는 데 걸리는 나중 시간은?

① 2 초 ② 5 초 ③ 7 초 ④ 9 초 ⑤ 11 초

해설

$-3x^2 + 27x + 15 = 57$
 $3(x^2 - 9x + 14) = 0$
 $3(x - 2)(x - 7) = 0$
 $x = 2, 7$
따라서 나중 시간은 7 초 이다.

23. 다음 그림에서 $\angle ABC = \angle CAD$, $\overline{BC} = 8\text{cm}$ 이고 선분 AC 의 길이는 선분 CD 의 길이의 2 배일 때, 선분 CD 의 길이를 구 하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\angle ABC = \angle CAD$, $\angle C$ 는 공통이므로
 $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ (AA 닮음)
따라서 닮음비에 의해 $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{CD} : \overline{AC}$ 의 비례식이 성립
한다.
 $\overline{CD} = x$ 라 놓으면
 $2x : 8 = x : 2x$
 $4x^2 = 8x, x^2 - 2x = 0$
따라서 $x = 2$ 이다.

24. 어떤 정사각형의 가로 길이 4 cm 길게 하고, 세로 길이를 2 cm 짧게 하여 직사각형을 만들었더니 그 넓이가 40 cm² 가 되었다. 처음 정사각형의 넓이는?

① 25 cm²

② 30 cm²

③ 36 cm²

④ 40 cm²

⑤ 49 cm²

해설

정사각형의 한 변의 길이를 x cm 라고 하면, $(x + 4)(x - 2) = 40$ 이므로

$$x^2 + 2x - 8 = 40$$

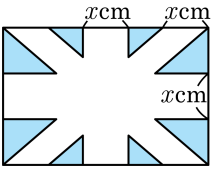
$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$(x - 6)(x + 8) = 0$$

$$x = 6 (\because x > 0)$$

따라서 처음 정사각형의 넓이는 $6 \times 6 = 36(\text{cm}^2)$ 이다.

25. 가로, 세로 길이가 각각 9 cm, 6 cm 인 직사각형 모양의 종이를 다음 그림과 같이 일정한 폭으로 오려내어 조각의 합이 12 cm^2 가 되도록 하려고 한다. 오려낸 부분의 폭은?



- ① 2 cm ② 3 cm
 ③ 4 cm ④ 2 cm 또는 7 cm
 ⑤ 3 cm 또는 6 cm

해설

조각들을 모아 보면 다음 그림처럼 가로가 $9 - 3x$, 세로가 $6 - x$ 인 직사각형이 됨을 알 수 있다. 넓이가 12 이므로 $(9 - 3x)(6 - x) = 12$
 정리하면 $x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x - 7) = 0$
 $x < 3$ 이므로 $x = 2$

