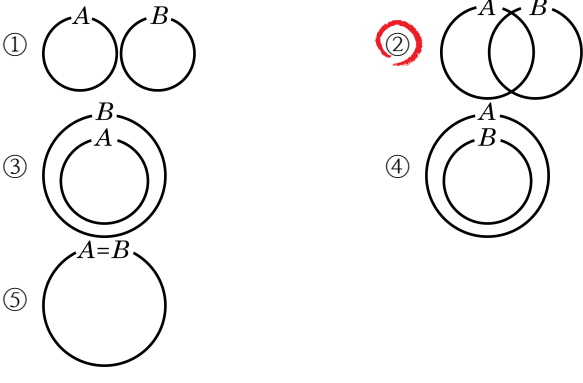


1. $A = \{x \mid x \text{는 } 10\text{이하의 소수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 12\text{이하의 홀수}\}$ 일 때, 두 집합 사이의 관계를 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은?



해설

$A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

2. $\{a\} \subset X \subset \{a, b, c\}$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

- ① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

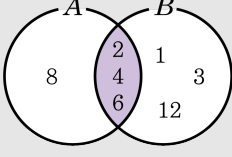
해설

집합 X 는 a 를 반드시 원소로 가지는 $\{a, b, c\}$ 의 부분집합이므로 개수는 $2^2 = 4$ (개)

3. $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 일 때, $A \cup B$ 를 구하면?
- ① $\{2, 3, 4, 6, 12\}$ ② $\{1, 2, 4, 6, 12\}$
③ $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ ④ $\{2, 4, 6, 8\}$
⑤ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

해설

$A \cup B$ 는 A 에 속하거나 B 에 속하는 원소로 이루어진 집합이다. 집합 A, B 를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 다음 벤다이어그램과 같은 원소를 가지게 된다.



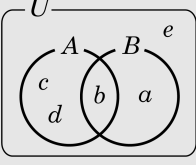
그러므로 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ 이다.

4. $U = \{a, b, c, d, e\}$ 의 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{c, d\}, B - A = \{a\}, A^c \cap B^c = \{e\}$ 일 때, 집합 B 는?

- ① $\{a\}$
- ② $\{b\}$
- ③ $\{a, b\}$
- ④ $\{a, c\}$
- ⑤ $\{a, b, c\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $B = \{a, b\}$ 이다.



5. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ 일 때, $(A - B) \subset X$, $X - A = \emptyset$ 을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 2 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$(A - B) \subset X \subset A$, 즉 $\{1, 3, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 5\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 2 개이다.

6. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{k \mid k = xy, x \in A, y \in A\}$ 일 때, 집합 $B - A$ 의 모든 원소의 합을 구하면?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

$A = \{-2, -1, 0, 1\}$ $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ 이다.

$\therefore B - A = \{2, 4\}$

$\therefore 2 + 4 = 6$

7. 명제 ‘이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑지 않다.’의 대우는?
- ① 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑다.
 - ② 이번 일요일에 날씨가 맑지 않으면, 그날 체육 대회는 열리지 않는다.
 - ③ 이번 일요일에 날씨가 맑으면, 그날 체육 대회는 열린다.
 - ④ 이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑다.
 - ⑤ 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑지 않다.

해설

명제 $p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 이다.

8. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a - b| > |a| - |b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \leq 0$

② $ab \geq 0$

③ $a + b \geq 0$

④ $ab < 0$

⑤ $a - b > 0$

해설

$|a - b| > ||a| - |b||$ 에 대하여

$$(a - b)^2 - (||a| - |b||)^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$$

$$= -2ab + 2|a||b| > 0 \text{ 이려면}$$

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

9. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B^c \subset A^c$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

- ① $A \cap B = \emptyset$

② $A \cup B = A$

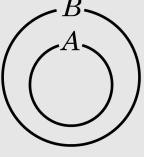
③ $A \subset B$
- ④ $A - B = \emptyset$

⑤ $B \cap A^c = \emptyset$

해설

두 집합 A, B 에 대하여 $B^c \subset A^c$ 이면 $A \subset B$ 이고, 다음 벤 다이어그램과 같은 포함관계를 만족한다.

- ① $A \cap B = A$
- ② $A \cup B = B$
- ⑤ $B \cap A^c \neq \emptyset$



10. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, a+1\}$, $B = \{4, 5, a\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{3, 4\}$ 일 때, $n(A - B)$ 를 구하면? (단, a 는 상수)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$B = \{4, 5, a\}$ 이고 $A \cap B = \{3, 4\}$ 이므로 $a = 3$

이 때, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

$A - B = \{1, 2\}$

$\therefore n(A - B) = 2$

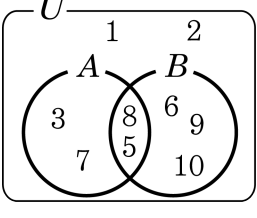
11. 자연수 k 의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라 할때, $(A_4 \cap A_6) \supset A_k$ 인 k 의 최솟값을 a 라 하고 $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$ 인 k 의 최댓값을 b 라 할 때 $a+b$ 의 값은 ?

- ① 16 ② 20 ③ 10 ④ 15 ⑤ 27

해설

$(A_4 \cap A_6) \supset A_k$ 인 k 는 4와 6의 공배수이므로 k 의 최솟값은 4와 6의 최소공배수 12이다. $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$ 인 k 는 8과 12의 공약수이므로 k 의 최댓값은 8과 12의 최대공약수 4이다.
 $\therefore$ 최솟값 a 는 12이고 최댓값 b 는 4이므로 $a+b = 12+4 = 16$

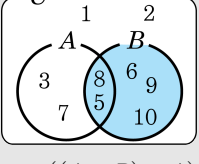
12. 다음 벤 다이어그램에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?



- ① $n(U) = 9$
- ② $n(A \cap B^c) = 2$
- ③ $n((A \cup B) - A) = 2$
- ④ $n(B - A) = 3$
- ⑤ $n(A^c) = 5$

해설

③ $(A \cup B) - A$ 를 색칠하면 다음과 같다.



$\therefore n((A \cup B) - A) = 3$

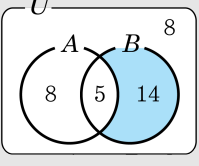
13. 학생 35명 중에서 제주도에 가 본 학생이 13명, 경주에 가 본 학생이 19명, 두 곳 모두 가 본 적이 없는 학생이 8명일 때, 경주에만 가 본 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : 명

▶ 정답 : 14명

해설

전체 학생을 U , 제주도에 가 본 학생을 A , 경주에 가 본 학생을 B 라 할 때, 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 경주에만 가 본 학생은 14명이다.

14. 다음 조건을 p 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여 p 가 참인 것을 모두 고르면?

① $|x| = x$

② $x^2 = 1$

③ $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$

④ $x^2 \geq 0$

⑤ $x^2 + 1 > 2x$

해설

- ① 모든 실수 x 에 대하여 $|x| = x$ (거짓)
 $x \geq 0$ 일 때 $|x| = x$, $x < 0$ 일 때 $|x| = -x$ 이다.
② 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 = 1$ (거짓)
 $x = \pm 1$ 일 때만 $x^2 = 1$ 이다.
③ 모든 실수 x 에 대하여 $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ (참)
④ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 \geq 0$ (참)
⑤ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 1 > 2x$ (거짓) $x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2 \geq 0$ 이므로 $x \neq 1$ 인 x 에 대해서만 $x^2 + 1 > 2x$ 이다.

15. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B) \cup (B - A) = U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A = B$

② $B \subset A$

③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \emptyset$

⑤ $A^C = B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B 의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.

그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A 와 B 의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.

따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

16. $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식의 최솟값을 구하여라.

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) &= ab + \frac{4}{ab} + 5 \\ &\geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} + 5 = 9\end{aligned}$$

따라서, 최솟값은 9

17. 부등식 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 24$ 를 만족시키는 실수 x, y, z 에 대하여 $x - 2y + 3z$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$$(x - 2y + 3z)^2$$

$$= \{x + \sqrt{2}(-\sqrt{2}y) + \sqrt{3}(\sqrt{3}z)\}^2$$

$$\leq \{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\}$$

$$\{x^2 + (-\sqrt{2}y)^2 + (\sqrt{3}z)^2\}$$

$$= 6(x^2 + 2y^2 + 3z^2) \leq 144$$

$$\therefore -12 \leq x - 2y + 3z \leq 12$$

따라서, 구하는 최솟값은 -12 이다.

$$\text{(참고) 위의 부등식에서 } \frac{x}{1} = \frac{-\sqrt{2}y}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}z}{\sqrt{3}},$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 24$$

즉, $x = -y = \pm 2$ 일 때 등식이 성립한다.

18. 다음 조건을 만족하는 두 집합 A, B 에 대하여 $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

- ㉠ $A = \{2, a, a^2\}, B = \{b, c, 4\}$
- ㉡ $A \subset B, B \subset A$
- ㉢ a, b, c 가 서로 다른 자연수

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$A \subset B, B \subset A$ 이므로 $A = B$

$4 \in B$ 이므로 $4 \in A$

$a = 4$ 또는 $a^2 = 4$

(i) $a = 4$ 일 때, $A = \{2, 4, 16\}, B = \{b, c, 4\}$

$\therefore b = 2, c = 16$ 또는 $b = 16, c = 2$

(ii) $a^2 = 4$ 일 때, $a = 2$ (a 는 자연수)

$A = \{2, 2^2\} = \{2, 4\}, B = \{b, c, 4\}$

b 또는 c 가 2 이어야 하므로 a, b, c 가 서로 다른 자연수가 될 수 없다.

$\therefore a + b + c = 4 + 2 + 16 = 22$

19. 두 유한집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

- ① $A \subset B$ 이면 $n(A) < n(B)$ 이다.
- ② $A \neq B$ 이면 $n(A) \neq n(B)$ 이다.
- ③ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.
- ④ $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.
- ⑤ $A = B$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.

해설

- ① $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c\}$ 이면 $A \subset B$ 이지만 $n(A) = n(B)$ 이다.
- ② $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 이면 $A \neq B$ 이지만 $n(A) = n(B)$ 이다.
- ③ $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 이면 $n(A) < n(B)$ 이지만 $A \not\subset B$ 이다.
- ④ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이고, $A \neq B$ 이다.

21. 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라고 하자. $P - (Q \cup R) = (P \cup Q) - R$ 가 성립할 때, 다음 명제 중 반드시 참이 되는 것은?
- ① $p \rightarrow q$

② $r \rightarrow q$

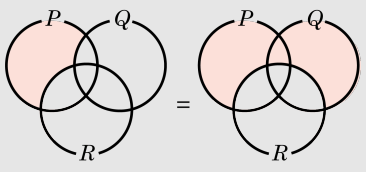
③ $q \rightarrow p$

④ $p \rightarrow r$

⑤ $q \rightarrow r$

해설

$P - (Q \cup R) = (P \cup Q) - R$ 벤다이어그램으로 나타내면



$Q \cup R = R \leftrightarrow Q \subset R \therefore q \rightarrow r$ 가 참이다.

22. 실수 x 에 대하여 세 조건 p, q, r 이 다음과 같을 때, 두 명제 $p \Rightarrow q$ 와 $r \Rightarrow p$ 일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은?

$$\begin{aligned} p &: -2 \leq x \leq 3 \text{ or } x \geq 5 \\ q &: x \geq a \\ r &: x \geq b \end{aligned}$$

- ① 5
- ② 3
- ③ 0
- ④ -3
- ⑤ -5

해설

$r \Rightarrow p, p \Rightarrow q$ 에서 $r \Rightarrow q$ 이므로 $R \subset P \subset Q$

$a \leq -2, 5 \leq b$

a 의 최댓값 $-2, b$ 의 최솟값 5

$\therefore -2 + 5 = 3$

- 23.** 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

- (1) $B \subset A$
- (2) B 의 원소의 개수는 3 개 이하이다.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 42 개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

원소의 개수가 3 이하인 집합 A 의 부분집합은 다음과 같다.

원소가 0 개인 부분집합 : $\emptyset$

원소가 1 개인 부분집합 :

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{12\}$

원소가 2 개인 부분집합 :

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{1, 12\},$
 $\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 12\}, \{3, 4\},$
 $\{3, 6\}, \{3, 12\}, \{4, 6\}, \{4, 12\}, \{6, 12\}$

원소가 3 개인 부분집합 :

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 2, 12\},$
 $\{1, 3, 4\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 3, 12\}, \{1, 4, 6\},$
 $\{1, 4, 12\}, \{1, 6, 12\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 6\},$
 $\{2, 3, 12\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 12\}, \{2, 6, 12\},$
 $\{3, 4, 6\}, \{3, 4, 12\}, \{3, 6, 12\}, \{4, 6, 12\}$

24. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 $A \subset B \subset X$ 를 만족하는 두 집합 A, B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수는?

- ① 8 개 ② 16 개 ③ 24 개 ④ 27 개 ⑤ 32 개

해설

$A \subset B \subset X$ 를 만족하는 두 집합 A, B 를 집합 B 의 원소의 개수에 따라 분류해 보면

- i) $n(B) = 0$ 일 때, $B = \emptyset$ 이면 $A = \emptyset$ 이므로 1가지이다.
- ii) $n(B) = 1$ 일 때, $B = \{1\}, \{2\}, \{3\}$ 각각의 경우에 따라 A 는 2가지씩이므로 6가지이다.
- iii) $n(B) = 2$ 일 때, $B = \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}$ 각각의 경우에 따라 A 는 4가지씩이므로 12가지이다.
- iv) $n(B) = 3$ 일 때, $B = \{1, 2, 3\}$ 이면 A 는 8가지이다.
따라서 두 집합 A, B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수는 $1 + 6 + 12 + 8 = 27$ (개)이다.

25. $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 인 양수 a, b, c 에 대하여 $abc \leq 1$ 임을 다음과 같이 증명하였다.

(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면
 $1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc = 8$
이 때, (산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면
 $a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}$
 $ab + bc + ca \geq 3 \times \boxed{(가)}$ 이고,
등호는 $a = b = c$ 일 때 성립한다.
 $\therefore 8 \geq 1 + 3(abc)^{\frac{1}{3}} + 3(abc)^{\frac{2}{3}} + abc = \left\{1 + (abc)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$
그러므로 $(abc)^{\frac{1}{3}} + 1 \leq 2$
곧, $abc \leq 1$ 을 얻는다.
또, 등호는 $\boxed{(나)}$ 일 때 성립한다.

- ① $abc, a = b = c = 1$
- ② $(abc)^{\frac{1}{3}}, a = 2$ 이고 $b = c$
- ③ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a = b = c = 1$
- ④ $abc, a = b$ 또는 $c = 2$
- ⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}, a = b = c = 2$

해설

(산술평균) $\geq$ (기하평균)을 이용하면
 $a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}, ab + bc + ca \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}}$
또, 위에서 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립하므로 $(1+a)^3 = 8$ 에서
 $a = b = c = 1$