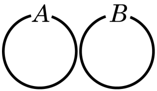
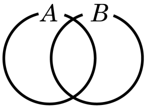
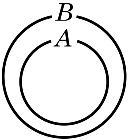
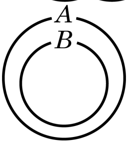
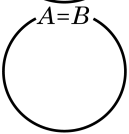
1. $A=\{x \mid x$는 10이하의 소수$\}$, $B=\{x \mid x$는 12이하의 홀수$\}$ 일 때, 두 집합 사이의 관계를 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$

2. $\{a\} \subset X \subset \{a,\ b,\ c\}$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

집합 X 는 a 를 반드시 원소로 가지는 $\{a,\ b,\ c\}$ 의 부분집합이므로 개수는 $2^2 = 4$ (개)

3. $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $B = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$ 일 때, $A \cup B$ 를 구하면?

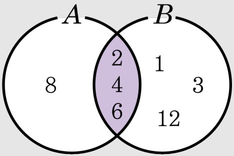
① $\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ ② $\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 12\}$

③ $\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ ④ $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12\}$

해설

$A \cup B$ 는 A 에 속하거나 B 에 속하는 원소로 이루어진 집합이다. 집합 A, B를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$이므로 다음 벤다이어그램과 같은 원소를 가지게 된다.



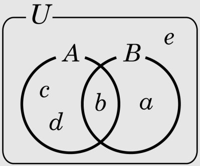
그러므로 $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12\}$ 이다.

4. $U=\{a,b,c,d,e\}$ 의 부분집합 A, B 에 대하여 $A-B=\{c,d\}$, $B-A=\{a\}$, $A^c\cap B^c=\{e\}$ 일 때, 집합 B 는?

① $\{a\}$　　② $\{b\}$　　③ $\{a,b\}$　　④ $\{a,c\}$　　⑤ $\{a,b,c\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $B=\{a,b\}$ 이다.



5. 두 집합 $A=\{1,2,3,5\}$, $B=\{2,4,6,8\}$ 일 때, $(A-B)\subset X, X-A=\varnothing$ 을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$(A-B)\subset X\subset A$, 즉 $\{1,3,5\}\subset X\subset\{1,2,3,5\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 2 개이다.

6. 두 집합 A, B에 대하여 $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{k|k = xy, x \in A, y \in A\}$ 일 때, 집합 $B - A$의 모든 원소의 합을 구하면?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

$A = \{-2, -1, 0, 1\}$ $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ 이다.

$\therefore B - A = \{2, 4\}$

$\therefore 2 + 4 = 6$

7. 명제 '이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑지 않다.'의 대우는?

① 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑다.

② 이번 일요일에 날씨가 맑지 않으면, 그날 체육 대회는 열리지 않는다.

③ 이번 일요일에 날씨가 맑으면, 그날 체육 대회는 열린다.

④ 이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑다.

⑤ 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑지 않다.

해설

명제 $p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 이다.

8. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b| > |a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \le 0$　② $ab \ge 0$　③ $a+b \ge 0$
④ $ab < 0$　⑤ $a-b > 0$

해설

$|a-b| > ||a|-|b||$ 에 대하여
$(a-b)^2 - (||a|-|b||)^2$
$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$
$= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면
a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.
따라서 $ab < 0$

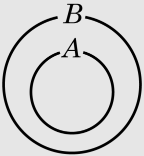
9. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B^c \subset A^c$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

① $A \cap B = \varnothing$ ② $A \cup B = A$ ③ $A \subset B$

④ $A - B = \varnothing$ ⑤ $B \cap A^c = \varnothing$

해설

두 집합 A, B 에 대하여 $B^c \subset A^c$ 이면 $A \subset B$ 이고, 다음 벤 다이어그램과 같은 포함관계를 만족한다.



① $A \cap B = A$

② $A \cup B = B$

⑤ $B \cap A^c \neq \varnothing$

10. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ a+1\}$, $B=\{4,\ 5,\ a\}$ 에 대하여 $A\cap B=\{3,\ 4\}$ 일 때, $n(A-B)$ 를 구하면? (단, a 는 상수)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$B=\{4,\ 5,\ a\}$ 이고 $A\cap B=\{3,\ 4\}$ 이므로 $a=3$
이 때, $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5\}$
$A-B=\{1,\ 2\}$
$\therefore n(A-B)=2$

11. 자연수 k의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k라 할때, $(A_4 \cap A_6) \supset A_k$인 k의 최솟값을 a라 하고 $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$인 k 의 최댓값을 b라 할 때 $a+b$의 값은 ?

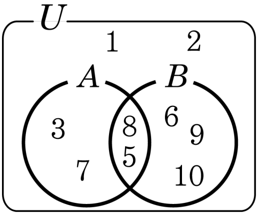
① 16　　② 20　　③ 10　　④ 15　　⑤ 27

해설

$(A_4 \cap A_6) \supset A_k$ 인 k 는 4 와 6 의 공배수이므로 k 의 최솟값은 4 와 6 의 최소공배수 12 이다. $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_k$ 인 k 는 8 과 12 의 공약수이므로 k 의 최댓값은 8과 12 의 최대공약수 4이다.

$\therefore$ 최솟값 a는 12 이고 최댓값 b는 4이므로 $a+b = 12+4 = 16$

12. 다음 벤 다이어그램에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?



① $n(U)=9$

② $n(A\cap B^c)=2$

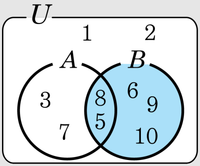
③ $n((A\cup B)-A)=2$

④ $n(B-A)=3$

⑤ $n(A^c)=5$

해설

③ $(A\cup B)-A$ 를 색칠하면 다음과 같다.



$\therefore\ n((A\cup B)-A)=3$

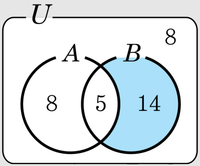
13. 학생 35명 중에서 제주도에 가 본 학생이 13명, 경주에 가 본 학생이 19명, 두 곳 모두 가 본적이 없는 학생이 8명일 때, 경주에만 가 본 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 14명

해설

전체 학생을 U, 제주도에 가 본 학생을 A, 경주에 가 본 학생을 B라 할 때, 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 경주에만 가 본 학생은 14명이다.

14. 다음 조건을 p라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 p가 참인 것을 모두 고르면?

① $|x| = x$ ② $x^2 = 1$

③ $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ ④ $x^2 \geq 0$

⑤ $x^2 + 1 > 2x$

해설

① 모든 실수 x 에 대하여 $|x| = x$ (거짓)
$x \geqq 0$ 일 때 $|x| = x$, $x < 0$ 일 때 $|x| = -x$ 이다.
② 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 = 1$ (거짓)
$x = \pm 1$ 일 때만 $x^2 = 1$ 이다.
③ 모든 실수 x 에 대하여 $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ (참)
④ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 \geq 0$ (참)
⑤ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 1 > 2x$ (거짓) $x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2 \geq 0$ 이므로 $x \neq 1$ 인 x에 대해서만 $x^2 + 1 > 2x$ 이다.

15. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)\cup(B-A)=U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A=B$　② $B\subset A$　③ $A\subset B$

④ $A\cap B=\varnothing$　⑤ $A^C=B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.
그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A와 B의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.
따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

16. $a > 0$, $b > 0$일 때, 다음 식의 최솟값을 구하여라.

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a > 0$, $b > 0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right) = ab + \frac{4}{ab} + 5$$

$$\geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} + 5 = 9$$

따라서, 최솟값은 9

17. 부등식 $x^2+2y^2+3z^2 \le 24$를 만족시키는 실수 x, y, z에 대하여 $x-2y+3z$의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$(x-2y+3z)^2$

$=\left\{x+\sqrt{2}(-\sqrt{2}y)+\sqrt{3}(\sqrt{3}z)\right\}^2$

$\le \left\{1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right\}$

$\left\{x^2+(-\sqrt{2}y)^2+(\sqrt{3}z)^2\right\}$

$=6(x^2+2y^2+3z^2) \le 144$

$\therefore\ -12 \le x-2y+3z \le 12$

따라서, 구하는 최솟값은 -12이다.

(참고) 위의 부등식에서 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{-\sqrt{2}y}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}z}{\sqrt{3}}$,

$x^2+2y^2+3z^2=24$

즉, $x=-y=\pm 2$일 때 등식이 성립한다.

18. 다음 조건을 만족하는 두 집합 A, B 에 대하여 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

㉠ $A=\{2,\ a,\ a^2\}$, $B=\{b,\ c,\ 4\}$
㉡ $A\subset B$, $B\subset A$
㉢ a, b, c 가 서로 다른 자연수

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$A\subset B$, $B\subset A$ 이므로 $A=B$

$4\in B$ 이므로 $4\in A$

$a=4$ 또는 $a^2=4$

(i) $a=4$ 일 때, $A=\{2,\ 4,\ 16\}$, $B=\{b,\ c,\ 4\}$

$\therefore\ b=2,\ c=16$ 또는 $b=16,\ c=2$

(ii) $a^2=4$ 일 때, $a=2$ (a 는 자연수)

$A=\{2,\ 2^2\}=\{2,\ 4\}$, $B=\{b,\ c,\ 4\}$

b 또는 c 가 2 이어야 하므로 a, b, c 가 서로 다른 자연수가 될 수 없다.

$\therefore\ a+b+c=4+2+16=22$

19. 두 유한집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A \subset B$ 이면 $n(A) < n(B)$ 이다.

② $A \neq B$ 이면 $n(A) \neq n(B)$ 이다.

③ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.

④ $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.

⑤ $A = B$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.

해설

① $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c\}$ 이면 $A \subset B$ 이지만 $n(A) = n(B)$ 이다.

② $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 이면 $A \neq B$ 이지만 $n(A) = n(B)$ 이다.

③ $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 이면 $n(A) < n(B)$ 이지만 $A \not\subset B$ 이다.

④ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이고, $A \neq B$ 이다.

20. 다음 두 조건을 만족하는 집합 A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

$$A \cap \{4,\ 8,\ 10,\ 12\} = \{4,\ 10\}$$
$$A \cup \{4,\ 8,\ 10,\ 12\} = \{4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 64 개

해설

$A \cap \{4,\ 8,\ 10,\ 12\} = \{4,\ 10\}$에서 집합 A는 원소 4, 10을 포함하고, 원소 8, 12는 포함하지 않는다.

또 $A \cup \{4,\ 8,\ 10,\ 12\} = \{4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$에서 집합 A는 원소 5, 6, 9, 11을 포함한다.

$\therefore\ A = \{4,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$

따라서 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$ (개)이다.

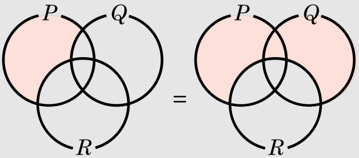
21. 조건 p, q, r을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R이라고 하자. $P-(Q\cup R)=(P\cup Q)-R$가 성립할 때, 다음 명제 중 반드시 참이 되는 것은?

① $p\to q$ ② $r\to q$ ③ $q\to p$

④ $p\to r$ ⑤ $q\to r$

해설

$P-(Q\cup R)=(P\cup Q)-R$ 벤다이어그램으로 나타내면



$Q\cup R=R\leftrightarrow Q\subset R\ \therefore\ q\to r$가 참이다.

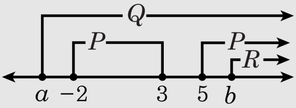
22. 실수 x 에 대하여 세 조건 p, q, r 이 다음과 같을 때, 두 명제 $p \Rightarrow q$ 와 $r \Rightarrow p$ 일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은?

p : $-2 \le x \le 3$ or $x \ge 5$ q : $x \ge a$ r : $x \ge b$

① 5 ② 3 ③ 0 ④ -3 ⑤ -5

해설

$r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow q$ 에서 $r \Rightarrow q$ 이므로 $R \subset P \subset Q$



$a \le -2,\ 5 \le b$

a 의 최댓값 -2, b 의 최솟값 5

$\therefore\ -2+5=3$

23. 집합 $A = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 B의 개수를 구하여라.

(1) $B \subset A$ (2) B 의 원소의 개수는 3 개 이하이다.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 42 개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$
원소의 개수가 3 이하인 집합 A 의 부분집합은 다음과 같다.
원소가 0 개인 부분집합 : $\varnothing$
원소가 1 개인 부분집합 :
$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{6\},\ \{12\}$
원소가 2 개인 부분집합 :
$\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{1,\ 4\},\ \{1,\ 6\},\ \{1,\ 12\},$
$\{2,\ 3\},\ \{2,\ 4\},\ \{2,\ 6\},\ \{2,\ 12\},\ \{3,\ 4\},$
$\{3,\ 6\},\ \{3,\ 12\},\ \{4,\ 6\},\ \{4,\ 12\},\ \{6,\ 12\}$
원소가 3 개인 부분집합 :
$\{1,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 2,\ 6\},\ \{1,\ 2,\ 12\},$
$\{1,\ 3,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 6\},\ \{1,\ 3,\ 12\},\ \{1,\ 4,\ 6\},$
$\{1,\ 4,\ 12\},\ \{1,\ 6,\ 12\},\ \{2,\ 3,\ 4\},\{2,\ 3,\ 6\},$
$\{2,\ 3,\ 12\},\{2,\ 4,\ 6\},\{2,\ 4,\ 12\},\{2,\ 6,\ 12\},$
$\{3,\ 4,\ 6\},\{3,\ 4,\ 12\},\{3,\ 6,\ 12\},\{4,\ 6,\ 12\}$

24. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 $A \subset B \subset X$를 만족하는 두 집합 $A,\ B$의 순서쌍 (A, B) 의 개수는?

① 8 개 ② 16 개 ③ 24 개 ④ 27 개 ⑤ 32 개

해설

$A \subset B \subset X$ 를 만족하는 두 집합 $A,\ B$ 를 집합 B 의 원소의 개수에 따라 분류해 보면

i) $n(B) = 0$ 일 때, $B = \varnothing$ 이면 $A = \varnothing$ 이므로 1가지이다.

ii) $n(B) = 1$ 일 때, $B = \{1\},\ \{2\},\ \{3\}$ 각각의 경우에 따라 A 는 2가지씩이므로 6가지이다.

iii) $n(B) = 2$ 일 때, $B = \{1,\ 2\},\ \{2,\ 3\},\ \{3,\ 1\}$ 각각의 경우에 따라 A 는 4가지씩이므로 12가지이다.

iv) $n(B) = 3$ 일 때, $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ 이면 A 는 8가지이다.

따라서 두 집합 $A,\ B$ 의 순서쌍 $(A,\ B)$ 의 개수는 $1 + 6 + 12 + 8 = 27$ (개) 이다.

25. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$인 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $abc \le 1$임을 다음과 같이 증명하였다.
(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

주어진 식을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때, (산술평균)≥(기하평균)을 이용하면
$a+b+c \ge 3(abc)^{\frac{1}{3}}$
$ab+bc+ca \ge 3 \times$ $\boxed{(가)}$ 이고,
등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.
$\therefore 8 \ge 1+3(abc)^{\frac{1}{3}}+3(abc)^{\frac{2}{3}}+abc=\left\{1+(abc)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$
그러므로 $(abc)^{\frac{1}{3}}+1 \le 2$
곧, $abc \le 1$ 을 얻는다.
또, 등호는 $\boxed{(나)}$ 일 때 성립한다.

① abc , $a=b=c=1$
② $(abc)^{\frac{1}{3}}$, $a=2$ 이고 $b=c$
③ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a=b=c=1$
④ abc , $a=b$ 또는 $c=2$
⑤ $(abc)^{\frac{2}{3}}$, $a=b=c=2$

해설

(산술평균)≥(기하평균)을 이용하면
$a+b+c \ge 3(abc)^{\frac{1}{3}}$, $ab+bc+ca \ge 3(abc)^{\frac{2}{3}}$
또, 위에서 등호는 $a=b=c$일 때 성립하므로 $(1+a)^3=8$에서
$a=b=c=1$