1. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-2) \le x-2 \\ x+1 \ge 1 \end{cases}$ 의 해가 자연수일때, 해의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$\begin{cases} 3(x-2) \le x-2 \\ x+1 \ge 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x-x \le -2+6 \\ x \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x \ge 0 \end{cases}$

$\therefore\ 0 \le x \le 2$

따라서 자연수인 해는 1, 2로 모두 2개이다.

2. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수가 10 개일 때, 정수 a 의 값은?

$$\begin{cases} 7x + 4 > 5x \\ 15 - x > a \end{cases}$$

① 3, 4　　② 5, 6　　③ 6

④ 6, 7　　⑤ 4, 5, 6

해설

$7x + 4 > 5x \quad \therefore\ x > -2$

$15 - x > a \quad \therefore\ x < 15 - a$

만족하는 정수는 10 개이므로 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 이다.

$8 < 15 - a \leq 9$

$6 \leq a < 7$

$\therefore\ a = 6$

3. 어느 인터넷 유료 정보사이트는 한 달 기본 가입비가 19,000 원이고 정보 건당 이용료가 50 원이다. 한 달 사용 요금이 25,000 원 이상 30,000 원 이하가 되게 하려고 할 때, 옳지 <u>않은</u> 정보 이용 건수는?

① 120 건 ② 160 건 ③ 200 건

④ 220 건 ⑤ 240 건

해설

한 달 동안 x 건의 정보를 이용할 때, 사용하는 요금을 식으로 나타내면 $19000+50x$ 이다. 한 달 요금이 25,000 원 이상 30,000 원 이하가 되기 위해서는 $25000 \le 19000 + 50x \le 30000$ 이다.

이를 연립방정식으로 나타내면 $\begin{cases} 19000 + 50x \ge 25000 \\ 19000 + 50x \le 30000 \end{cases}$ 이고,

정리하면 $\begin{cases} x \ge 120 \\ x \le 220 \end{cases}$ 이다.

따라서 $120 \le x \le 220$ 이다.

그러므로, 120 건 이상 220 건 이하로 사용하여야 한다.

4. 4 % 소금물 300 g 과 9 % 의 소금물을 섞어서 7 % 이상의 소금물을 만들었다. 이 때, 9 % 의 소금물은 몇 g 이상 섞었는지 구하여라.

▶ 답 : ______ g

▷ 정답 : 450 g

해설

9 % 의 소금물의 양을 x g 이라 하면

$$\frac{4}{100} \times 300 + \frac{9}{100} \times x \geq \frac{7}{100} \times (300 + x)$$

$$1200 + 9x \geq 2100 + 7x$$

$$9x - 7x \geq 2100 - 1200$$

$$\therefore \ x \geq 450$$

5. 부등식 $3-|2-x| \le -1$의 해를 구하면?

① $x \ge 4$ 또는 $x \le -1$

② $x \ge 6$ 또는 $x \le -2$

③ $-2 \le x \le 4$

④ $-1 \le x \le 4$

⑤ $0 \le x \le 4$

해설

i) $x < 2$일때, $3-(2-x) \le -1,\ x \le -2$

$\therefore x \le -2$

ii) $x \ge 2$일때, $3-(x-2) \le -1,\ x \ge 6$

$\therefore x \ge 6$

6. 모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt{-ax^2+2ax+1}$ 이 0 이 아닌 실수일 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $-1 \le a < 0$ ② $-1 < a \le 0$ ③ $-1 < a < 0$

④ $0 < a \le 1$ ⑤ $0 \le a < 1$

해설

모든 실수 x 에 대하여

$\sqrt{-ax^2+2ax+1}$ 이 0 이 아닌 실수이려면

$-ax^2+2ax+1>0$,

즉 $ax^3-2ax-1<0$ 이어야 한다.

(i) $a=0$ 일 때,

$-1<0$ 이므로 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때, $a<0 \cdots$ ㉠

$ax^2-2ax-1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2+a<0,\ a(a+1)<0$$

$\therefore\ -1<a<0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 의 공통 범위를 구하면

$-1<a<0$

(i), (ii)에서 $-1<a\le 0$

7. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을
$\alpha,\ \beta$라 하면, $\alpha+\beta=3$
한편, $f(2x+1)=0$에서
$2x+1=\alpha,\ 2x+1=\beta$이므로
$x=\dfrac{\alpha-1}{2},\ \dfrac{\beta-1}{2}$
따라서, $\dfrac{\alpha-1}{2}+\dfrac{\beta-1}{2}$
$=\dfrac{\alpha+\beta-2}{2}=\dfrac{3-2}{2}=\dfrac{1}{2}$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면, $\alpha+\beta=3$
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면
$f(2x+1)=k(2x+1-\alpha)(2x+1-\beta)$
$\therefore\ f(2x+1)=0$의 두 근은 $x=\dfrac{\alpha-1}{2},\ \dfrac{\beta-1}{2}$
$\therefore\ \dfrac{\alpha-1}{2}+\dfrac{\beta-1}{2}=\dfrac{\alpha+\beta-2}{2}=\dfrac{3-2}{2}=\dfrac{1}{2}$

8. x의 이차방정식 $mx^2+2(1-2m)x+m=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 m의 범위를 구하면?

① $0<m<\frac{1}{3}$ ② $m<\frac{1}{3},\ \ m>1$

③ $m<0,\ \ 0<m<\frac{1}{3},\ \ m>1$ ④ $m<0\ ,\ m>1$

⑤ $\frac{1}{3}<m<1$

해설

이차방정식이므로 $m\neq 0$ $\cdots$ ㉠

$\frac{D}{4}=(1-2m)^2-m^2>0$에서

$(m-1)(3m-1)>0,\ \ m<\frac{1}{3},\ \ m>1$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $m<0,\ \ 0<m<\frac{1}{3},\ \ m>1$

9. 둘레의 길이가 $24\,\mathrm{cm}$인 직사각형의 넓이를 $35\,\mathrm{cm}^2$ 이상 되도록 할 때, 그 한 변의 길이 a의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $9\,\mathrm{cm}$ ② $10\,\mathrm{cm}$ ③ $12\,\mathrm{cm}$ ④ $15\,\mathrm{cm}$ ⑤ $19\,\mathrm{cm}$

해설

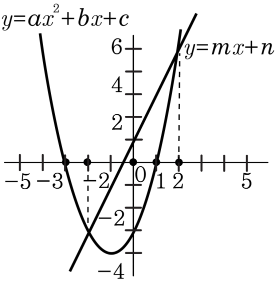
한 변의 길이가 a이므로 다른 한 변의 길이는 $12-a$이다.

$a(12-a) \geq 35$에서 $(a-5)(a-7) \leq 0$

$\therefore\ 5 \leq a \leq 7$

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 $12\,\mathrm{cm}$

10. 일차함수 $y = mx + n$ 과 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.



연립이차부등식 $\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ ax^2 + bx + c < mx + n \end{cases}$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ ax^2 + bx + c < mx + n \end{cases}$ 에서 위의 식의 근은 $-3 < x < 1$,

아래 식의 근은 $-2 < x < 2$ 이다.

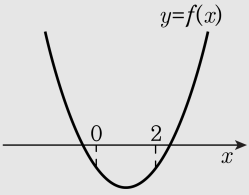
따라서 공통범위는 $-2 < x < 1$ 이다. $-2 \times 1 = -2$

11. 부등식 $0 \le x \le 2$ 의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 의 영역에 포함되도록 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

부등식 $0 \le x \le 2$ 의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 의 영역에 포함되어야하므로
$0 \le x \le 2$ 에서
$x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이어야 한다.
$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 라 하면
$0 \le x \le 2$ 에서
$f(x) \le 0$ 이어야 하므로
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같아야 한다.
$f(0) = a^2 - 4 \le 0$ 에서
$-2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠
$f(2) = a^2 - 2a \le 0$ 에서
$0 \le a \le 2 \quad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 의 공통 범위를 구하면 $0 \le a \le 2$
따라서, 최댓값은 $M = 2$, 최솟값은 $m = 0$ 이므로
$M - m = 2$



12. 연립부등식

$$\begin{cases} x^2 \le 3x \\ x^2 + x \ge 2 \end{cases}$$ 의 해가 부등식

$ax^2 + 2bx - 6 \ge 0$ 의 해와 같을 때, ab 의 값을 구하면?

① 8 ② 4 ③ 2 ④ -4 ⑤ -8

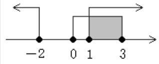
해설

$x^2 - 3x \le 0$, $x(x-3) \le 0$

$0 \le x \le 3$

$x^2 + x - 2 \ge 0$, $(x+2)(x-1) \ge 0$

$x \le -2, x \ge 1$



$(x-1)(x-3) \le 0$, $x^2 - 4x + 3 \le 0$

$\rightarrow -2x^2 + 8x - 6 \ge 0$

$a = -2, b = 4$

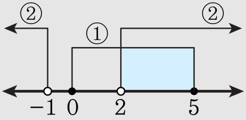
$\therefore ab = -8$

13. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$이 되도록 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설



첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x - 5) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots$ ①

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \le 5$ 이므로 a의 값은 2이다.

14. 이차방정식 $x^2 - 4x + k = 0$의 두 실근이 모두 3보다 작기 위한 실수 k의 범위를 구하면 $m < k \le n$이다. mn의 값을 구하면?

① 10 ② 12 ③ -15 ④ -12 ⑤ -10

해설

ⅰ) $D/4 = 4 - k \ge 0,\ k \le 4$

ⅱ) $f(3) > 0,\ k > 3$ 따라서,

ⅰ) ⅱ)를 모두 만족하는 k의 범위는 $3 < k \le 4$

$m = 3,\ n = 4$ 이므로 $mn = 12$

15. 이차방정식 $x^2-(a+1)x-3=0$의 한 근이 3보다 크고, 다른 한 근은 3보다 작을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a>-3$ ② $a>-1$ ③ $a>1$

④ $a<1$ ⑤ $a<3$

해설

$f(x)=x^2-(a+1)x-3$이라 하면

방정식 $f(x)=0$의 두근 사이에 3이 있으므로

$f(3)=9-3(a+1)-3<0$

$-3a+3<0$

$\therefore\ a>1$

16. 두 부등식 $3x - 4 < x + 6$ 과 $1 - 3x \le -5$를 모두 만족하는 수 중에서 가장 작은 정수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$3x - 4 < x + 6,\ \ x < 5$

$1 - 3x \le -5,\ \ 2 \le x < 5$

따라서 모두 만족하는 수는 $2 \le x < 5$이므로 가장 작은 정수는 2 이다.

17. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수를 구하여라.

$$\begin{cases} \dfrac{5x+2}{3} - \dfrac{3}{2}x < 2 \\ \dfrac{3x-1}{4} - \dfrac{x}{2} > -1 \end{cases}$$

▶ 답 : ＿＿ 개

▷ 정답 : 10 개

해설

$10x+4-9x<12 \quad \therefore \; x<8$

$3x-1-2x>-4 \quad \therefore \; x>-3$

$\therefore -3<x<8$

이므로 이를 만족하는 정수의 개수는 10개이다.

18. 연립부등식 $-3 < \frac{x+a}{2} \leq 2$ 의 해가 $-7 < x \leq b$ 일 때, $ax - b < 0$ 의 해를 구하면?

① $x < 1$ ② $x > 1$ ③ $1 < x < 3$

④ $x < 3$ ⑤ $x > 3$

해설

$-6 < x + a \leq 4$ 와 $-7 < x \leq b$와 같으므로 $-6 - a < x \leq 4 - a$,

$a = 1,\ b = 3$

$ax - b = x - 3 < 0$

그러므로 $x < 3$ 이다.

19. 연립부등식 $-1.2 < \dfrac{2x-a}{6} < -x$ 의 해가 $\dfrac{2}{5} < x < b$ 일때, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$-1.2 < \frac{2x-a}{6} < -x$$

$$\rightarrow \begin{cases} -7.2 < 2x-a \\ 2x-a < -6x \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{a-7.2}{2} \\ x < \dfrac{a}{8} \end{cases}$$

$\dfrac{a-7.2}{2} < x < \dfrac{a}{8}$ 가 $\dfrac{2}{5} < x < b$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{a-7.2}{2} &= \frac{2}{5} \\ 5a-36 &= 4 \end{aligned}$$

$\therefore\ a = 8$

$\therefore\ b = \dfrac{a}{8} = \dfrac{8}{8} = 1$

20. $a-1 < x < a+1$을 만족하는 모든 x가 $-1 < x < 3$을 만족할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $0 < a < 2$　② $0 \le a \le 2$　③ $a < 0,\ a > 2$

④ $a \le 0,\ a \ge 2$　⑤ 구할 수 없다.

해설

$a-1 \ge -1$ 이고, $a+1 \le 3$ 이어야 하므로

$a \ge 0,\ a \le 2$

$\therefore\ 0 \le a \le 2$

21. 사료 A, B 의 1g 당 영양소 C, D 의 함유량과 100g 당 단가는 다음과 같다.

	C(mg)	D(mg)	단가(원)
A	21	15	500
B	16	19	600

하루에 두 사료를 모두 합해 0.3kg 먹는 어떤 동물의 1 일 영양소 섭취량이 C 는 60g 이하, D 는 50g 이하가 되게 하려고 한다. 구입한 사료의 가격이 가장 쌀 때, 사료 B 의 무게를 구하여라.

▶ 답 : ______ g

▷ 정답 : 60 g

해설

사료 A 의 무게를 xg 이라 하면 사료 B 의 무게는 $(300-x)$ g 이다.

C 가 60g 이하이므로

$0.21x + 0.16(300 - x) \leq 60 \cdots$ ㉠

D 가 50g 이하이므로

$0.15x + 0.19(300 - x) \leq 50 \cdots$ ㉡

㉠ 을 풀면 $x \leq 240$

㉡ 을 풀면 $x \geq 175$

$\therefore\ 175 \leq x \leq 240$

구입한 사료의 가격이 가장 싸려면 A 를 많이 구입해야 하고 B 는 적게 구입해야 한다. 따라서 구하는 사료 B 의 무게는 $300 - 240 = 60$ (g) 이다.

22. $6[x]^2 - 31[x-1] - 13 < 0$을 풀면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \le x < 3$　② $-2 \le x < 5$　③ $0 \le x < 3$

④ $1 \le x < 5$　⑤ $1 \le x < 6$

해설

$n \le [x] < n+1$에서

$n-1 < [x-1] < n$이므로

$[x-1] = [x]-1$

$\therefore 6[x]^2 - 31[x-1] - 13$

$= 6[x]^2 - 31([x]-1) - 13$

$= 6[x]^2 - 31[x] + 18 < 0$

$\therefore (2[x]-9)(3[x]-2) < 0$

$$\frac{2}{3} < [x] < \frac{9}{2}$$

$\therefore 1 \le [x] \le 4$이므로

$[x] = 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$\therefore 1 \le x < 5$

23. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $p<x<q$일 때, 이차부등식 $cx^2+bx+a<0$의 해를 p, q를 써서 나타내면? (단, $p>0$)

① $x>q$ 또는 $x<p$

② $\frac{1}{q}<x<\frac{1}{p}$

③ $x>\frac{1}{p}$

④ $x<\frac{1}{q}$

⑤ $x>\frac{1}{p}$ 또는 $x<\frac{1}{q}$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $p<x<q$ 라면

$(a<0$ 이므로$)$ $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0$

$\Leftrightarrow (x-p)(x-q)<0$, $x-(p+q)x+pq<0$

$p+q=-\frac{b}{a},\ pq=\frac{c}{a}$

$cx^2+bx+a<0$ 에서 양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2+\frac{b}{a}x+1>0$ $(\because a<0)$

$\Leftrightarrow pqx^2-(p+q)x+1>0$

$\Leftrightarrow (px-1)(qx-1)>0$

$\therefore x>\frac{1}{p}$ 또는 $x<\frac{1}{q}$

$\left(\because \frac{1}{p}>\frac{1}{q}\right)$

24. 이차방정식 $x^2-2ax+4=0$의 서로 다른 두 근이 -3과 3 사이에 있도록 하는 정수 a의 개수는?(단, $f(x)=x^2-2ax+4$로 두고 풀어라.)

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^2-2ax+4=0$ 의 서로 다른 두 근이
-3과 3 사이에 있으면
(i) $D>0$, (ii) $f(-3)>0$, (iii) $f(3)>0$, (iv) 대칭축이 -3과 3 사이에 있다.

(i) $D>0$에서 $\frac{D}{4}=a^2-4>0$

$(a-2)(a+2)>0$

$\therefore a<-2,\ a>2$

(ii) $f(-3)>0$에서

$f(-3)=9+6a+4>0,\ \ 6a>-13$

$\therefore a>-\frac{13}{6}$

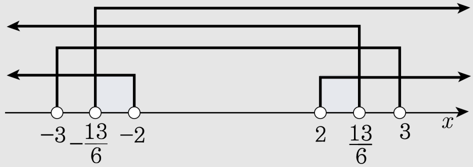
(iii) $f(3)>0$에서

$f(3)=9-6a+4>0,\ 13>6a,\ \ \therefore \frac{13}{6}>a$

(iv) 대칭축의 방정식 $x=-\frac{(-2a)}{2}=a$ 에서

$-3<a<3$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 a값의 범위를 수직선으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore\ -\frac{13}{6}<a<-2,\ 2<a<\frac{13}{6}$ 이고 이 범위에 있는 정수는 없다.

25. 서로소인 두 자연수 a, b 에 대하여 $20 < a < 30$ 이고, $1 - \frac{1}{a}$ 을 소수로 나타내면 무한소수이다. $6a < 100b < 7a$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$6a < 100b < 7a$ 이면 $0.06a < b < 0.07a \cdots$ ㉠
$20 < a < 30$ 이므로 $0.06 \times 20 < b < 0.07 \times 30$
$1.2 < b < 2.1$ 이므로 $b = 2$
㉠ 에서 $0.06a < 2 < 0.07a$
$0.06a < 2$ 는 $a < 33.\times\times\times$
$2 < 0.07a$ 는 $a > 28.\times\times\times$
$\therefore\ 28.\times\times\times < a < 33.\times\times\times$
$1 - \frac{1}{a}$ 을 소수로 나타냈을때 무한소수이려면 $\frac{1}{a}$ 이 무한소수이어야 하고 a 는 2 와 5 이외의 소인수를 가져야한다.
따라서 $a = 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33$ 이고 $20 < a < 30$ 이므로 a 의 값은 $a = 29$ 이다.
$\therefore\ a + b = 29 + 2 = 31$