1. 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 3 인 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=3$ ② $x^2+y^2=1$

③ $(x-1)^2+(y-1)^2=3^2$ ④ $x^2+y^2=3^2$

⑤ $(x-1)^2+(y-1)^2=3$

해설

$(x-0)^2+(y-0)^2=3^2 \Rightarrow \quad \therefore \ x^2+y^2=9$

2. 방정식 $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ 은 어떤 도형을 나타내는가?

① 중심이 $(0,\ 1)$ 이고, 반지름이 1 인 원

② 중심이 $(0,\ 1)$ 이고, 반지름이 2 인 원

③ 중심이 $(0,\ 1)$ 이고 반지름이 4 인 원

④ 중심이 $(0,\ -1)$ 이고 반지름이 2 인 원

⑤ 중심이 $(0,\ -1)$ 이고 반지름이 1 인 원

해설

$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$
$\Rightarrow\ x^2 + (y-1)^2 = 4$ 중심은 $(0,\ 1)$ 이고,
반지름은 2 인 원이다.

3. 세 점 $\mathrm{P}(1,\ 0),\ \mathrm{Q}(0,\ -1),\ \mathrm{R}(2,\ 2)$을 지나는 원의 방정식은 $x^2+y^2+ax+by+c=0$이다. 이때, $a+c$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ 2 ⑤ 3

해설

P, Q, R의 좌표를 원의 방정식에 각각 대입하면

$$\begin{cases} 1+a+c=0 & \cdots ㉠ \\ 1-b+c=0 & \cdots ㉡ \\ 2a+2b+c+8=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

$\therefore$ ㉠에서 $a+c=-1$

4. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0,\ 3)$, $(4,\ 3)$ 을 지나는 원의 반지름의길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

중심을 $(a,\ a-1)$, 반지름을 r이라 하면,
구하는 원의 방정식은
$(x-a)^2 + (y-a+1)^2 = r^2$ ·····㉠
i) ㉠ 이 $(0,\ 3)$ 을 지나므로
$a^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 8a + 16 = r^2$ ·····㉡
ii) ㉠이 $(4,\ 3)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (4-a)^2 = r^2$
$\Rightarrow\ 2a^2 - 16a + 32 = r^2$ ·····㉢
㉡ − ㉢ : $8a - 16 = 0$
$\therefore\ a = 2$
$\therefore$ ㉡에서 $r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$
$\therefore\ r = 2\sqrt{2}$ $(\because\ r > 0)$

5. 두 원 $x^2+y^2-x+2y-3=0$, $2x^2+2y^2-6x+ay-2=0$ 의 공통현이 직선 $y=-3x-1$ 과 직교할 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

해설

두 원의 공통현의 방정식은
$2(x^2+y^2-x+2y-3)-(2x^2+2y^2-6x+ay-2)=0$
즉, $4x+(4-a)y-4=0\cdots\cdots$㉠
직선 ㉠과 직선 $y=-3x-1$ 은 직교하므로
$\frac{-4}{4-a}\times(-3)=-1$ 에서 $a=16$

6. 두 점 A(1, 5), $B(-3, -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2+(y+2)^2=13$ ② $(x-1)^2+(y-2)^2=52$

③ $(x-1)^2+(y+2)^2=13$ ④ $(x+1)^2+(y-2)^2=13$

⑤ $(x+1)^2+(y-2)^2=52$

해설

원의 중심은 두 점 A, B 의 중점이므로,

$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = (-1, 2)$ 이다.

또, 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2)^2=13$

7. 이차방정식 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 이 원을 나타내도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면?

① $k < -5$ ② $k > -5$ ③ $-5 < k < 5$

④ $k < \sqrt{5}$ ⑤ $k > -\sqrt{5}$

해설

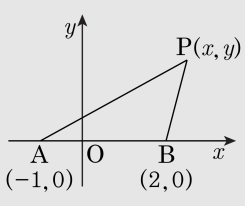
원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 을 표준형으로 고치면,
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = k + 5$
이 때, $k + 5 > 0$ 이어야 하므로 $k > -5$

8. 두 점 A(−1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 4

해설

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면



$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$\therefore\ 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

그런데 $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$4\{(x-2)^2 + y^2\} = \{(x+1)^2 + y^2\}$

정리하면 $(x-3)^2 + y^2 = 4$

따라서 원의 반지름은 2 이다.

9. 두 원 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $x^2+y^2-6x-8y=0$의 위치관계 중 옳은 것은?

① 서로 외부에 있다

② 외접한다

③ 두 점에서 만난다

④ 내접한다

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다

해설

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$을 정리하면
$(x-1)^2+(y-1)^2=1$
$x^2+y^2-6x-8y=0$을 정리하면
$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$
$\sqrt{3-1^2+(4-1)^2}<5-1$
따라서 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

10. 직선 $y = -2x + a$가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a의 값은 ?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$
직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 $(2,\ 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로
$a = 2 \times 2 + 1 = 5$

11. 원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(1, -3)$ 에서 원에 그은 접선의 x 절편은?

① -10 ② $-\frac{10}{3}$ ③ -1 ④ 10 ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

점 $(1, -3)$ 에서 그은 접선의 방정식은
$1\ x - 3\ y = 10$
x 절편은 $y = 0$ 일 때의 x 좌표이므로 $x = 10$

12. 중심이 직선 $3x+y=12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a,b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
중심의 좌표는 $(r,\ r)$ 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식을
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ ……㉠
한편, 점 $(r,\ r)$ 는 직선 $3x+y=12$ 위에 있으므로 $3r+r=12$
$\therefore\ r=3$
따라서, 구하는 원의 방정식은 ㉠에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$

13. 두 원 $x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$ 의 교점과 점 $(1,1)$ 을 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 일 때, $A+B-C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+y^2-5=0$, $x^2+y^2-3x-y-4=0$
교점을 지나는 원의 방정식은
$(x^2+y^2-5)m+x^2+y^2-3x-y-4=0$
의 꼴이고, 이 원이 점 $(1,1)$ 을지나므로
$(1+1-5)m+1+1-3-1-4=0$
$\therefore m=-2$
이 값을 대입하고 정리하면
$x^2+y^2+3x+y-6=0$ 이다.
$\therefore A=3,\ B=1,\ C=-6$
그러므로 $A+B-C=10$

14. 원 $x^2+y^2-2ax-2y-4=0$이 원 $x^2+y^2+2x+2ay-2=0$의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a의 값의 합은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

원 $x^2+y^2-2ax-2y-4=0$이
원 $x^2+y^2+2x+2ay-2=0$의 둘레를 이등분하려면
두 원의 공통현이
원$x^2+y^2+2x-2ay-2=0$의 중심을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
$(1+a)x+(a+1)y+1=0\cdots\cdots$㉠
㉠이 점 $(-1,\ -a)$를 지나므로
$(1+a)\times(-1)+(a+1)\times(-a)-2=0$
$a^2+2a=0$
∴ 근과 계수와의 관계에 의해 -2

15. 두 원 $x^2+y^2=4$, $(x-3)^2+y^2=1$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ $2\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{3}$　⑤ $3\sqrt{5}$

해설

주어진 두 원의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

점 O′에서 $\overline{OA}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{AH}=\overline{BO'}=1$

$\therefore \overline{OH}=2-1=1$

두 원의 중심의 좌표가 (0, 0), (3, 0) 이므로

중심거리 $\overline{OO'}$ 은 3 이다.

따라서 $\triangle OO'H$ 에서

피타고라스의 정리에 의하여

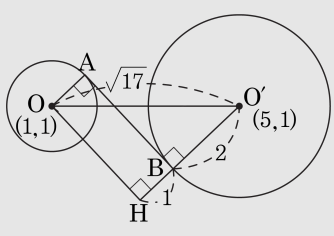
$\overline{AB}=\overline{O'H}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

16. 두 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+y^2=4$ 의 공통내접선의 길이는?

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

두 원의 중심거리는
$\overline{OO'}=\sqrt{(5-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{17}$
$\overline{O'H}=\overline{O'B}+\overline{BH}=\overline{O'B}+\overline{OA}=2+1=3$ 이므로
$\overline{AB}=\overline{OH}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{O'H}^2}=\sqrt{17-3^2}$
$=2\sqrt{2}$
따라서 공통내접선의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.



17. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2+y^2=4, \quad y=x+3$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 중심 $(0,0)$ 에서 직선 $y=x+3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$d=\dfrac{|3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

이때, $d=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}>2=r$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0 개

18. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 접하려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.
⇒ 중심 : $(0,\ 0)$ 직선 : $x + y - k = 0$

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

⇒ $k = \pm 2$
∴ $k = -2\ (\because\ k < 0)$

19. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2=4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$d=\dfrac{|3\times 0+4\times 0+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|a|}{5}<2=r$

$\dfrac{|a|}{5}<2$, $|a|<10$, $-10<a<10$

$a=-9,\ -8,\ -7,\ -6,\ \cdots,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ ∴ 19 개

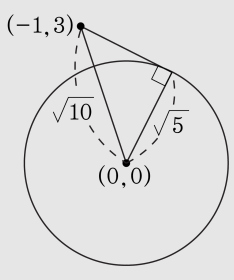
20. $x^2+y^2=5$ 밖의 한 점 $(-1,3)$ 에서 이 원에 접선을 그을 때, 점 $(-1,3)$ 에서 접점까지의 거리를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\sqrt{5}$

해설

접선의 길이를 구하는 것이므로
$\sqrt{1^2+(-3)^2-5}=\sqrt{5}$



21. 기울기가 2 이고 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하는 두 직선의 y 절편을 각각 $a,\ b$ 라 할 때, $a - b$ 의 값은?(단 $a > b$)

① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $6\sqrt{5}$

해설

기울기가 2 이고
원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하는 직선의 방정식은
$y = 2x \pm 3\sqrt{2^2 + 1}$
곧 $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$ 이므로
$a = 3\sqrt{5},\ b = -3\sqrt{5}$ ($\because a > b$)
$\therefore a - b = 6\sqrt{5}$

22. 두 점 A $(-3,\ 8)$, B $(7,\ -4)$ 를 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

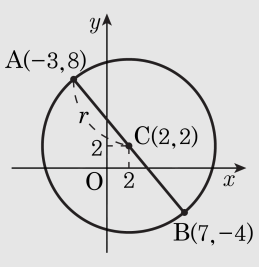
① $(x-1)^2+(y-1)^2=18$ ② $(x-2)^2+(y-2)^2=32$

③ $(x-1)^2+(y-1)^2=7$ ④ $(x-3)^2+(y-3)^2=22$

⑤ $(x-2)^2+(y-2)^2=61$

해설

구하는 원의 중심을 C 라고 하면



C 는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$C\left(\frac{-3+7}{2},\ \frac{8-4}{2}\right)$

$\therefore C(2,2)$

반지름의 길이를 r 라고 하면

r 는 $\overline{AB}$ 의 길이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$r=\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{(2+3)^2+(2-8)^2}=\sqrt{61}$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=61$

23. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x+2y=2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $a=11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$
직선이 원에 접하므로 원의 중심
$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가
원의 반지름의 길이2 와 같다.
따라서, $\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$
$|a-1|=10$
$a-1=\pm 10$
$a>0$ 이므로 $a=11$

24. 기울기가 $\sqrt{3}$ 이고 원 $x^2+y^2=16$ 에 접하는 직선으로 제 4 사분면을 지나는 것은?

① $y=\sqrt{3}x-9$ ② $y=\sqrt{3}x-8$ ③ $y=\sqrt{3}x-5$
④ $y=\sqrt{3}x+8$ ⑤ $y=\sqrt{3}x+9$

해설

구하는 접선의 방정식은 $m=\sqrt{3},\ r=4$ 이므로
$y=\sqrt{3}x\pm 4\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=\sqrt{3}x\pm 8$
두 직선 중 제4 사분면을 지나는 것은
② $y=\sqrt{3}x-8$

25. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면
접선은 $y+1=m(x-3)\cdots①$
따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선
$mx-y-3m-1=0$ 과의 거리가
원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.
$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하면
$9m^2+6m+1=5m^2+5,\ 4m^2+6m-4=0$
따라서, 기울기 $m=\frac{1}{2},-2$
여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면
$y=-2x+5$
따라서 y절편은 5이다.