1. $f(x)$를 $x-1,\ x-2$로 나눈 나머지가 각각 3, 5일 때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지를 구하면?

① $2x+1$　　② $2x+3$　　③ $2x-1$
④ $2x$　　⑤ $2x-3$

해설

x^2-3x+2로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면 $f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$
그런데 $f(1)=3,\ f(2)=5$이므로
$a+b=3,\ 2a+b=5$
$\therefore\ a=2,\ b=1$
따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

2. $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2x+1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q(x)+3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x)+2\}+3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x)+2(x-1)+3 \\ &= (x^2+2x-3)Q'(x)+2x+1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

3. 복소수 $z=(1+i)x^2+(5+2i)x+3(2-i)$ 에서 z가 순허수일 때, 실수 x의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$z=(x^2+5x+6)+(x^2+2x-3)i$
$\quad=(x+2)(x+3)+(x-1)(x+3)i$
순허수가 되려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$
$\therefore\ x=-2$

4. 0이 아닌 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립할 때, $|a| + |b| - |a-b|$ 를 간단히 하면?

① $2a$ ② $-2b$ ③ 0 ④ $-2a$ ⑤ $2b$

해설

$a \geq 0,\ b < 0$

$|a| + |b| - |a-b| = a - b - (a-b) = 0$

5. 이차방정식 $x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, m은 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2이므로
$x = 2$를 대입하면
$2^2 - 2 + m = 0 \quad \therefore m = -2$
따라서 주어진 방정식은 $x^2 - x - 2 = 0$이다.
이 방정식을 풀면
$(x-2)(x+1) = 0$에서 $x = 2$ 또는 $x = -1$
이므로 다른 한 근은 -1이다.

6. x의 이차방정식 $x^2-(2a+2+m)x+a^2+4a-n=0$이 a의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 상수 m,n을 정할 때, $m+n$의 값은?

① -3　② -2　③ 1　④ 3　⑤ 4

해설

$D=(2a+2+m)^2-4(a^2+4a-n)=0$

이 등식을 a에 관하여 정리하면

$4a(m-2)+m^2+4m+4n+4=0$

이 등식이 a에 관계없이 항상 성립하려면

$4(m-2)=0,\ m^2+4m+4n+4=0$

$\therefore\ m=2,\ n=-4$　　$\therefore\ m+n=-2$

7. $4x^2-3x+2=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $(3\alpha-2)(3\beta-2)$의 값을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=\frac{3}{4},\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}(3\alpha-2)(3\beta-2)&=9\alpha\beta-6(\alpha+\beta)+4\\&=9\cdot\frac{1}{2}-6\cdot\frac{3}{4}+4\\&=\frac{9}{2}-\frac{9}{2}+4=4\end{aligned}$$

8. x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+6=0$의 두 근 a, b에 대하여 $|a-b|=1$이 성립할 때, $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}$의 값은? (단, $m<0$)

① $-1-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $2-\sqrt{3}$
④ $1+\sqrt{2}$ ⑤ $-2+\sqrt{5}$

해설

$x^2+mx+6=0$의 두 근이 a, b
$a+b=-m,\ ab=6$
$|a-b|=1$
$|a-b|^2=(a+b)^2-4ab$
$=m^2-24=1$
$m^2=25\ \therefore\ m=-5(\because\ m<0)$
$x^2-5x+6=0$
$(x-3)(x-2)=0$
$a=3,\ b=2$
$\therefore\ \sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$

9. 다음 중 인수분해를 바르게 한 것을 고르면?

① $x^2+4x+1=(x-2-\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})$

② $x^2-2x+5=(x-1+2i)(x+1+2i)$

③ $x^2+4=(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

④ $2x^2+4x-5=\left(x-\frac{-2+\sqrt{14}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2-6x+1=3\left(x-\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$

해설

근의 공식을 통해 나온 해를 바탕으로 인수분해 한다

① $x^2+4x+1=(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})$

② $x^2-2x+5=(x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6})$

③ $x^2+4=(x+2i)(x-2i)$

④ $2x^2+4x-5$

$=2\left(x-\frac{-2+\sqrt{14}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2-6x+1$

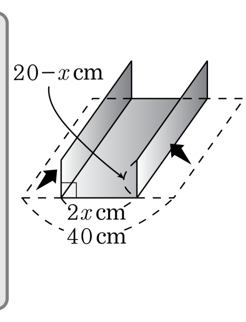
$=3\left(x-\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$

10. 너비가 40 cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때, 높이를 구하면?

① 10　② 8　③ 6　④ 4　⑤ 2

해설

직사각형의 가로를 $2x$ 라 하면 세로는 $20-x$ 이다.
단면의 넓이는
$2x(20-x)=-2x^2+40x=-2(x^2-20x+200)+100=-2(x-10)^2+200$
$\therefore\ x=10$ 일 때 넓이가 최대이다.



11. $x^2 + x - 1 = 0$ 일 때, $x^5 - 5x$ 의 값을 구하면?

① 2　　② 1　　③ 0　　④ −1　　⑤ −3

해설

$x^5 - 5x$ 를 $x^2 + x - 1$ 로 나누면
즉, $x^5 - 5x = (x^2 + x - 1) \times$ 몫-3
$x^2 + x - 1 = 0$
$\therefore\ x^5 - 5x = -3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.
$x^2 = -x + 1$

$$\begin{aligned} x^5 - 5x &= (x^2)^2 \times x - 5x \\ &= x(-x+1)^2 - 5x \\ &= x^3 - 2x^2 - 4x \\ &= x(-x+1) - 2(-x+1) - 4x \\ &= -x^2 - x - 2 \\ &= -(x^2 + x) - 2 \\ &= -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

12. $a^2 = 3$일 때, 다음 식의 값을 구하면?

$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$(2+a)^n = \alpha,\ (2-a)^n = \beta$로 놓으면

$P = \{(2+a)^n + (2-a)^n\}^2 - \{(2+a)^n - (2-a)^n\}^2$

$= (\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = 4\alpha\beta$

$= 4(2+a)^n(2-a)^n = 4(4-a^2)^n$

$= 4(4-3)^n = 4$

13. 실수 x가 $x^2-3x+1=0$을 만족할 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값을 구하면?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

준식의 양변을 x로 나누면

$x+\dfrac{1}{x}=3$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=3^3-3\times3=18$$

14. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{100}-1 = a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+ \cdots +a_{100}(x-1)^{100}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+ \cdots +a_{100} = 2^m+k$이다. $m+k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 98

해설

$x=0$을 대입하면
$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{100}=-1\cdots$ ㉠
$x=2$를 대입하면
$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=2^{100}-1\cdots$ ㉡
㉠ + ㉡: $2(a_0+a_2+a_6+\cdots+a_{100)}=2^{100}-2$
$\therefore\ a_0+a_2+a_6+\cdots+a_{100}=2^{99}-1$
$\therefore\ m=99,\ k=-1$이므로 $m+k=98$

15. x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 5이고, 그 몫을 다시 $x+3$으로 나눈 나머지가 3일 때, $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$,
$Q(x)$를 $x+3$으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$P(x)=(x-2)Q(x)+5, Q(x)=(x+3)Q_1(x)+3$이므로
$P(x)=(x-2)\{(x+3)Q_1(x)+3\}+5$
$\quad\quad=(x-2)(x+3)Q_1(x)+3x-1$
$\therefore\ P(-3)=-9-1=-10$
따라서 $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는
$-3P(-3)=-3\times(-10)=30$

해설

나머지정리에 의해 $Q(-3)=3$
$P(x)=(x-2)Q(x)+5$에서 양변에 x를 곱하면
$xP(x)=x(x-2)Q(x)+5x\cdots$①
나머지정리에 의해 $xP(x)$를 $x+3$로 나눈 나머지는 $-3P(-3)$이다.
①의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$-3P(-3)=-3\cdot(-5)Q(-3)-15$
$Q(-3)=3$을 대입하면 $-3P(-3)=30$

16. 세 개의 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $[a,\ b,\ c] = (a-b)(a-c)$라 할 때, $[a,\ b,\ c]+[b,\ c,\ a]+[c,\ a,\ b]=0$이면 $[a,\ b,\ c]$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)=0$

전개하여 정리하면 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore\ a=b=c$

$\therefore\ [a,\ b,\ c]=(a-b)(a-c)=0$

17. 자연수 n에 대하여 $1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$의 값을 모두 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $1-i$

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{1}{i}=-i$, $\left(\frac{1}{i}\right)^3=i$

ⅰ) $n=2k$일 때,

$1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$

$=1-i+i-i+\cdots+i=1$

ⅱ) $n=2k-1$일 때

$1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$

$=1-i+i-i+\cdots-i$

$=1-i$

18. 복소수 $z=\dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 z^3-2z^2+2z+5 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$z=\dfrac{2}{1+i}=1-i$

$z^2=-2i,\ z^3=-2-2i$

$\therefore\ z^3-2z^2+2z+5$

$=(-2i-2)-2(-2i)+2(1-i)+5$

$=5$

해설

$$\begin{aligned} z=1-i \quad &\Rightarrow \quad z-1=-i \\ &\Rightarrow \quad z^2-2z+1=-1 \\ &\Rightarrow \quad z^2-2z+2=0 \end{aligned}$$

$z^3-2z^2+2z+5=z(z^2-2z+2)+5=5$

19. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2+bx+c=0$이라 하면
$x^2+bx+(c+1)=0$의 근은 중근이 된다.
$\therefore\ D=b^2-4(c+1)=0$
$\therefore\ b^2=4c+4\cdots\cdots$ ㉠
또, $x^2+bx+(c-3)=0$의 두 근은 $\alpha,\ 2\alpha$가 된다.
$\therefore\ \alpha+2\alpha=-b\cdots\cdots$ ㉡
$\therefore\ \alpha\cdot 2\alpha=c-3\cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $b=\pm 12,\ c=35$이므로
처음 방정식은 $x^2\pm 12x+35=0$
$\therefore\ x=-5$ 또는 $-7,\quad x=5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합)$=(\pm 5)^2+(\pm 7)^2=74$

20. x의 이차방정식 $x^2 + (2m-1)x + m^2 - m - 2 = 0$의 두 근이 모두 양이고, 또 한 근이 다른 근의 2배일 때, 실수 m의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$D = (2m-1)^2 - 4(m^2 - m - 2) = 9 > 0$이므로
서로 다른 두 실근을 갖는다.
두 근을 α, 2α라 하면
$\alpha + 2\alpha = -(2m-1) > 0 \quad \cdots\cdots ㉠$
$\alpha \times 2\alpha = m^2 - m - 2 > 0 \quad \cdots\cdots ㉡$
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$m < -1 \quad \cdots\cdots ㉢$
또, ㉠에서의 $\alpha = \dfrac{1-2m}{3}$을 ㉡에 대입하여 풀면 $m = -4,\ 5$
조건 ㉢에 의해서 $m = -4$

21. x에 대한 이차방정식 $x^2+2x-3=m(x+2)$ 가 $1<x<2$에서 적어도 한 개의 실근을 가질 때, 정수 m의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} y=x^2=2x-3\cdots\cdots ㉠ \\ y=m(x+2)\cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

이라 하면 직선 ㉡은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 0)$을 지난다.

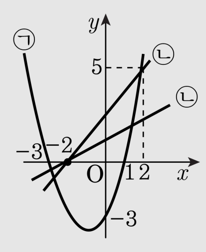
이 때, 교점의 x좌표가 1 과 2사이에 존재해야 하므로

(i) 직선 ㉡이 점 $(1,\ 0)$을 지날 때

$3m=0 \quad \therefore m=0$

(ii) 직선 ㉡이 점 $(2,\ 5)$를 지날 때

$4m=5 \quad \therefore m=\frac{5}{4}$



(i), (ii)에서 $0<m<\frac{5}{4}$

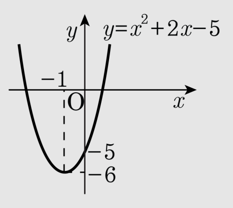
따라서, 정수 m의 값은 1하나뿐이다.

22. $-2 \le x \le 1$ 일 때, 함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

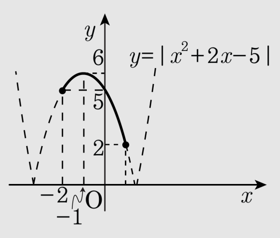
① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y = x^2 + 2x - 5 = (x+1)^2 - 6$ 이므로
$y = x^2 + 2x - 5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.

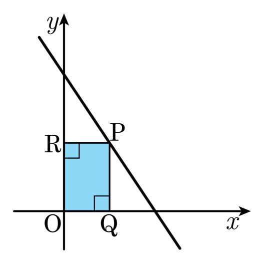


이 때, $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \le x \le 1$ 에서
함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $y = 6$, 최솟값은 $x = 1$ 일 때 $y = 2$ 이므로
최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

23. 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 이므로

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b=-\frac{3}{2}a+3$

$$\square\mathrm{OQPR}=ab=a\left(-\frac{3}{2}a+3\right)$$
$$=-\frac{3}{2}a^2+3a$$
$$=-\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{3}{2}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$a>0,\ b=-\frac{3}{2}a+3>0 \qquad \therefore\ 0<a<2$

따라서 $\square$OQPR 의 넓이는 $a=1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

24. 연립방정식 $x+y+z=-\frac{1}{2}$, $xy+yz+zx=-\frac{5}{2}$, $xyz=-1$을 만족시키는 해의 쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

근과 계수와의 관계에서
x, y, z를 세 근으로 하는
삼차방정식을 만들면

$$t^3+\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}t+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2t^3+t^2-5t+2=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2t-1)(t+2)=0$$

$$\therefore\ (x, y, z)=$$

$$\left(1, \frac{1}{2}, -2\right),\ \left(1, -2, \frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{2}, 1, -2\right),\ \left(\frac{1}{2}, -2, 1\right),$$

$$\left(-2, 1, \frac{1}{2}\right),\ \left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$$

25. x의 다항식 $f(x)$가 임의의 실수 u, v에 대하여 $f(u)f(v)=f(u+v)+f(u-v)$가 성립할 때, $f(3)$의 값은? (단, $f(1)=1$이라고 한다.)

① -1 ② 2 ③ -2 ④ 1 ⑤ 5

해설

$f(u)f(v)=f(u+v)+f(u-v)$가
u, v에 대한 항등식이므로
$u=1$, $v=0$일 때도 이 등식이 성립한다.
$\therefore\ f(1)f(0)=f(1)+f(1)$
$f(1)=1$이므로 $f(0)=2$
또, $u=v=1$일 때는
$f(1)f(1)=f(2)+f(0)\quad \therefore\ f(2)=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(3)&=f(2+1)=f(2)f(1)-f(2-1)\\&=f(2)f(1)-f(1)=-1-1\\&=-2\end{aligned}$$

26. n이 자연수일 때 $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x+2)^2$으로 나눈 나머지가 $4^n(x+2)$가 되도록 $a,\ b$의 값을 정할 때, $a-2b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -7

해설

$x^{2n}(x^2+ax+b)=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)\cdots$①
$x=-2$를 대입하면,
$4^n(4-2a+b)=0\ \therefore\ b=2a-4\cdots$②
②를 ①에 대입하면
$x^{2n}(x^2+ax+2a-4)$
$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$
한편, $x^2+ax+2a-4=x^2-4+a(x+2)$
$=(x+2)(x-2)+a(x+2)$
$=(x+2)(x-2+a)$
$\therefore\ x^{2n}(x+2)(x-2+a)$
$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$
$\therefore\ x^{2n}(x-2+a)=(x+2)Q(x)+4^n$
$x=-2$를 대입하면
$4^n(-4+a)=4^n\quad\therefore -4+a=1\quad\therefore\ a=5$
②에서 $b=6\quad\therefore\ a-2b=-7$

27. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$를 인수분해 하면?

① $(a+b)(ab+bc+ca)$

② $(b+c)(ab+bc+ca)$

③ $(a+b)(a+b+c)$

④ $(a+b+c)(ab+bc+ca)$

⑤ $(b+c)(a+b+c)$

해설

$a+b+c=k$ 라 하면

(준식)$=(k-a)(k-b)(k-c)+abc$

$=k^3-(a+b+c)k^2+(ab+bc+ca)k-abc+abc$

$=k\left\{k^2-(a+b+c)k+(ab+bc+ca)\right\}$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$ $(\because a+b+c=k)$

28. 세 변의 길이가 $x,\ y,\ z$인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?

① $z=x$인 이등변삼각형, 또는 y가 빗변인 직각삼각형

② $y=z$인 이등변삼각형, 또는 x가 빗변인 직각삼각형

③ x가 빗변인 직각삼각형

④ y가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x=y$인 이등변 삼각형, 또는 z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^2z^2-2xyz^2-2y^2z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy)=0$
$\therefore\ x=y$인 이등변 삼각형 또는 z가 빗변인 직각 삼각형
($\because\ x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2$에서 삼각형의 변인 $x,\ y,\ z$는 $x+y\neq z$)

29. x에 대한 두 다항식 $A = x(x-a-4)(x+a^2-1)$, $B=(x+3)(x+a)(x+a^2-5)$의 최대공약수가 x에 대한 이차식이 되도록 하는 정수 a에 대하여 a^2+a의 값을 구하면?

① 20　② 16　③ 10　④ 5　⑤ 2

해설

ⅰ) A의 인수 x를 최대공약수의 인수라고 하면
B에서 $x=0$을 대입하면
$3a(a^2-5)=0$, $a=0$($\because a$가 정수)
$\Rightarrow$두 식의 최대공약수는 이차가 아니다.
ⅱ) B의 인수 $x+3$이 최대공약수의 인수라고 하면
A에서 $x=-3$을 대입하면
$-3(-a-7)(a^2-4)=0$, $a=-7, 2, -2$
$a=-7, 2$일 때 A, B의 최대공약수는 일차식
$a=-2$일 때
즉, $(x+3)(x-2)$가 최대공약수가 이차식이다.
$\therefore\ a=-2,\ a^2+a=2$

30. 방정식 $ax^2 + ibx + c = 0$에 대하여 다음 설명 중 타당한 것은?

① z가 주어진 방정식의 근이면 $\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

② z가 주어진 방정식의 근이면 $i\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

③ z가 주어진 방정식의 근이면 iz는 $ax^2 + bx + c = 0$의 근이다.

④ z가 주어진 방정식의 근이면 $-\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

⑤ z가 주어진 방정식의 근이면 $-i\bar{z}$는 $ax^2 + bx + c = 0$의 근이다.

해설

z가 주어진 방정식의 근이라면
$a,\ b,\ c$는 실수이므로 켤레복소수의 성질을 적용하면
$az^2 + ibz + c = 0$, $\overline{az^2 + ibz + c} = 0$
$a\overline{(z^2)} - ib\bar{z} + c = 0$,
$a(-\bar{z})^2 + ib(-\bar{z}) + c = 0$이므로
$-\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

31. 복소수 z가 $z^2 = \bar{z}$일 때, z이 될 수 있는 수들의 합을 구하여라.(단, $\bar{z}$는 z 의 켤레복소수이다.)

① -2　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$z = a + bi$ (단, a, b 는 실수)라 하면

$z^2 = \bar{z}$ 에서$(a+bi)^2 = a - bi$

$\therefore a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$

$a^2 - b^2 = a, 2ab = -b$

$\therefore b = 0$ 또는 $a = -\frac{1}{2}$

i) $b = 0$ 일 때 : $a^2 = a \therefore a = 0$ 또는 $a = 1$

ii) $a = -\frac{1}{2}$일때 : $\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$　　$\therefore b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ z = 0,\ 1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

따라서 모든 z의 합은 0이다.

32. 원 $(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 위의 점 $(x,\ y)$ 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 최댓값은?

① $3+2\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$

④ 6 ⑤ $6+\sqrt{2}$

해설

$\frac{y}{x}=t$ 라고 놓으면 $y=tx \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 에 대입하여 정리하면

$(t^2+1)x^2-6(t+1)x+12=0$

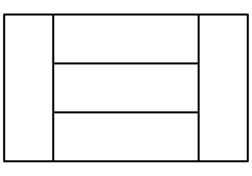
$\frac{D}{4}\geq 0$ 이므로 $9(t+1)^2-12(t^2+1)\geq 0$

$t^2-6t+1\leq 0$

$\therefore\ 3-2\sqrt{2}\leq t\leq 3+2\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은 $3+2\sqrt{2}$ 이다.

33. 다음 그림에서 직사각형의 변을 제외한 직사각형 내부의 선분의 길이의 총합이 48 이고, 내부의 5 개의 직사각형의 넓이는 모두 같다. 큰 직사각형의 넓이가 최대일 때의 큰 직사각형의 가로의 길이를 y , 세로의 길이를 x 라 할 때, xy 의 값을 구하여라.

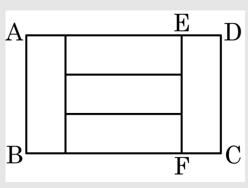


▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

그림에서



$\square\mathrm{CDEF} = \frac{1}{5}\square\mathrm{ABCD}$ 이므로

$\overline{\mathrm{DE}} = \frac{1}{5}y$

직사각형 내부 선분의 길이의 합이 48 이므로

$2x + \frac{6}{5}y = 48$,

$\therefore\ y = -\frac{5}{3}x + 40$

직사각형 ABCD 의 넓이를 S 라 하면

$S = xy = x\left(-\frac{5}{3}x + 40\right)$

$= -\frac{5}{3}(x-12)^2 + 240$

$\therefore\ x = 12$ 일 때, 큰 직사각형의 넓이가 최대가 되므로 $y = \left(-\frac{5}{3}\right) \times 12 + 40 = 20$

따라서 $xy = 240$ 이다.

34. 방정식 $x^3+x^2+x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

② $\alpha^4=1$

③ $\alpha^{100}+\alpha^{50}+\alpha^{25}+\alpha^{15}+1=1$

④ α는 실수가 아니다.

⑤ α^3은 방정식 $x^3+x^2+x+1=0$의 한 근이다.

해설

① α가 방정식
$x^3+x^2+x+1=0$의 한 근이므로,
$\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$
② α^4-1
$=(\alpha-1)(\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$이므로
$\alpha^4=1$
③ $\alpha^{100}+\alpha^{50}+\alpha^{25}+\alpha^{15}+1$
$=(\alpha^4)^{25}+(\alpha^4)^{12}\cdot\alpha^2+(\alpha^4)^6\cdot\alpha+(\alpha^4)^3\cdot\alpha^3+1$
$=1+\alpha^2+\alpha+\alpha^3+1=1$
④ $x^3+x^2+x+1=(x^2+1)(x+1)=0$에서
$x=-1$이라는 실근이 존재하므로
α는 실수일 수 있다.
⑤ $x=\alpha^3$을 방정식
$x^3+x^2+x+1=0$에 대입하면,
$\alpha^9+\alpha^6+\alpha^3+1$
$=(\alpha^4)^2\cdot\alpha+\alpha^4\cdot\alpha^2+\alpha^3+1$
$=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+1=0$
$(\because\ \alpha^4=1)$

35. 방정식 $x^2 - 12x + 35 = 3^y$ 을 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 에 대하여 $x_1 + x_2 + y_1 + y_2$ 의 값을 구하면?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$x^2 - 12x + 35 = (x-6)^2 - 1 = 3^y$ 에서 $x - 6 = t$ 라 하면
$t^2 - 1 = 3^y, \quad (t-1)(t+1) = 3^y$
따라서, $t+1,\ t-1$ 은 3^n 꼴이고 차가 2이므로 $y = 1$ 이다.
$(t+1,\ t-1) = (3,\ 1),\ (-1,\ -3)$
$\therefore\ t = 2,\ -2 \quad \therefore\ (x,\ y) = (8,\ 1),\ (4,\ 1)$
$\therefore\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 14$