1. 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지를 $r(x)$라 할 때, $f(x)-g(x)-2r(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$ ② $-r(x)$ ③ 0

④ $r(x)$ ⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=g(x)Q(x)+r(x)$

$\therefore f(x)-g(x)-2r(x)$

$\quad =g(x)Q(x)+r(x)-g(x)-2r(x)$

$\quad =g(x)\left\{Q(x)-1\right\}-r(x)$

여기서 $g(x)$의 차수는 $-r(x)$의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$이다.

2. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\ \ \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

3. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에 대입하면

$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

$\frac{1}{4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$

4. $\frac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1 \neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$\frac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0$, $a+k=0$, $-b+k=0$

$\therefore$ $k=2$, $a=-2$, $b=2$

$\therefore$ $a-b=-4$

5. 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x+2$ 로 나누면 3 이 남고, x^2-1 로 나누면 떨어진다. 이 때, abc 의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$$x^3+ax^2+bx+c = (x+2)Q_1(x)+3$$
$$= (x+1)(x-1)Q_2(x)$$

$f(-2)=3 \quad f(1)=0 \quad f(-1)=0$

$x=-2$ 대입, $-8+4a-2b+c=3$

$x=-1$ 대입, $-1+a-b+c=0$

$x=1$ 대입, $1+a+b+c=0$

세 식을 연립해서 구하면

$a=3, b=-1, c=-3$

$\therefore \ abc=9$

6. x 에 대한 항등식 $x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 를 만족하는 상수 a, b, c, d 의 곱 $abcd$ 의 값은?

① -2 ② 0 ③ 5 ④ 10 ⑤ 18

해설

$a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$
$= (x+1)[(x+1)\{a(x+1)+b\}+c]+d$ 임을 이용하여 조립제법을 사용하면

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & \\
 & & -1 & 1 & -1 & \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & \boxed{-2} & \leftarrow \ \mathrm{d} \\
 & & -1 & 2 & & \\
\hline
-1 & 1 & -2 & \boxed{3} & \leftarrow & \mathrm{c} \\
 & & -1 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{-3} & \leftarrow \mathrm{b} & & \\
 & \uparrow & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ abcd = 1 \times (-3) \times 3 \times (-2) = 18$

7. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$이고, $a = \sqrt{3} + 1$일 때, $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3}$의 값을 구하면?

① $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{4+\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}-3}{4}$

④ $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

해설

(ⅰ) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$에서 $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$

$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$

$\therefore\ x^2 - 2\sqrt{2}x = 1$

(ⅱ) $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3} = a^{x^2-2\sqrt{2}x-3} = a^{-2}$

$= \frac{1}{a^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

8. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$가 이차식의 완전제곱이 되도록 a의 값을 정하면?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 15 ⑤ 16

해설

(준식)$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+a$
여기서, $x^2-8x+7=X$로 놓으면
(준식) $=X(X+8)+a$
$=X^2+8X+a=(X+4)^2+a-16$
따라서 $a=16$

9. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형
② 이등변삼각형
③ 정삼각형
④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 에서 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)=0$

$\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$ 이고,

$a,\ b,\ c$ 는 실수이므로, $a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

10. $a+b=4$, $a^2+b^2=10$ 일 때, a^5+b^5 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 244

해설

$a+b=4$, $a^2+b^2=10$

$ab=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}=3$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=28$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^5+b^5 &= (a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)\\ &= 28\times 10-9\times 4\\ &= 244\end{aligned}$$

11. 삼차항의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)=f(2)=f(3)=3$ 이 성립할 때, $f(0)$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -3 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라고 두면,
$f(1)=1+a+b+c=3$
$f(2)=8+4a+2b+c=3$
$f(3)=27+9a+3b+c=3$
세 식을 연립하여 풀면
$a=-6,\ b=11,\ c=-3$
$f(x)=x^3-6x^2+11x-3$
$\therefore\ f(0)=-3$

해설

$f(1)=f(2)=f(3)=3$ 이므로
$f(x)-3=(x-1)(x-2)(x-3)$
$f(0)-3=-1\times(-2)\times(-3)=-6$
$\therefore f(0)=-3$

12. 모든 실수 x에 대하여 $x^{10} + 1 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{10}(x-1)^{10}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x = 0$을 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} \cdots$ ①

양변에 $x = 2$을 대입하면

$2^{10} + 1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \cdots$ ②

① + ②에 의해

$2^{10} + 2 = 2\left(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}\right)$

$\therefore \left(a_0 + a_2 + \cdots + a_{10}\right) = 2^9 + 1 = 513$

13. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나머지가 2이다. 다음 [보기]의 다항식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

㉠ $x+f(x)$	㉡ $x-g(x)$
㉢ $x+f(x)g(x)$	

① ㉠　　② ㉢　　③ ㉠,㉡
④ ㉠,㉢　　⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

$f(x)+g(x)=(x+1)Q(x)$
$f(x)-g(x)=(x+1)Q'(x)+2$
$x=-1$ 을 두 식에 각각 대입하면
$f(-1)+g(-1)=0 \cdots$ ①
$f(-1)-g(-1)=2 \cdots$ ②
①, ②을 연립하여 풀면 $f(-1)=1, g(-1)=-1$
보기의 식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것은 $x=-1$ 을 대입하면 식의 값이 0 이 된다.
㉠ $-1+f(-1)=-1+1=0$
㉡ $-1-g(-1)=-1+1=0$
㉢ $-1+f(-1)g(-1)=-1+1\times(-1)=-2$
∴ ㉠, ㉡

14. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 x^2+x+1 으로 나누면 나머지가 9, $f(x)-g(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누면 나머지가 -3 이다. 이 때, $f(x)$를 x^2+x+1로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x)+g(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+9 \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)-g(x)=(x^2+x+1)Q_2(x)-3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2f(x)=(x^2+x+1)\left\{Q_1(x)+Q_2(x)\right\}+6$

$f(x)=(x^2+x+1)\dfrac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}+3$

$\therefore$ 나머지는 3

15. 0이 아닌 세수 x, y, z에 대하여 x, y, z중 적어도 하나는 6이고, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$일 때, $2(x+y+z)$의 값을 구하면?

① 6　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

해설

x, y, z중 적어도 하나가 6이므로,
$(x-6)(y-6)(z-6)=0$
$\therefore\ xyz-6(xy+yz+zx)+36(x+y+z)-216=0\ \cdots$①
또, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$이므로
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6},\ \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$
$\therefore\ 6(xy+yz+zx)=xyz\ \cdots$②
①, ②에서
$36(x+y+z)=216$
$\therefore\ 2(x+y+z)=12$

16. $a^3+b^3+c^3=p(a+b+c)^3+q(a+b+c)(ab+bc+ca)+rabc$가 $a,\ b,\ c$에 대한 항등식이 되도록 상수 $p,\ q,\ r$의 값을 정할 때, $p+q+r$을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ -23 ⑤ 23

해설

$a^3+b^3+c^3=p(a+b+c)^3+q(ab+bc+ca)+rabc$에서
$a,\ b,\ c$에 대한 항등식이므로
$a=1, b=0, c=0 : 1=p\cdots$ ①
$a=1, b=1, c=0 : 2=2p+2q\ \cdots$ ②
$a=1, b=1, c=1 : 3=27p+9q+r\cdots$ ③
①, ②, ③에서 $p=1,\ q=0,\ r=-24$
$\therefore\ p+q+r=-23$

17. n이 자연수일 때, $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x+2)^2$으로 나눈 나머지가 $4^n(x+2)$가 되도록 $a,\ b$의 값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

(i) $f(x) = x^{2n}(x^2+ax+b)$

$= (x+2)^2 Q(x) + 4^n(x+2)$

$f(-2) = 4^n(4-2a+b) = 0$

$\therefore\ b = 2a-4$

(ii) $f(x) = x^{2n}(x^2+ax+2a-4)$

$= x^{2n}(x+2)(x+a-2)$

$= (x+2)^2 Q(x) + 4^n(x+2)$

$\therefore x^{2n}(x+a-2) = (x+2)Q(x) + 4^n$

$x=-2$를 대입하면

$4^n(-4+a) = 4^n,\ -4+a = 1$

$\therefore\ a = 5$

$b = 2a-4$에서 $b = 6$

$\therefore\ a+b = 11$

18. $x-1$로 나누면 나머지가 1이고, $x+1$로 나누면 나머지가 -1인 다항식 $f(x)$가 있다. $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. $f(0)=0$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $Q(0)=0$이다.

㉡ $f(x)$는 이차식이 될 수 없다.

㉢ $f(x)$가 삼차식이면 $f(x)=x^3$이다

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$f(1)=a+b=1,\quad f(-1)=-a+b=-1$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

$\therefore\ f(x)=(x^2-1)Q(x)+x$

㉠ $f(0)=-Q(0)=0$　　$\therefore$참

㉡ $f(x)$가 이차식이기 위해서는 $Q(x)$가 0이 아닌 상수이어야 하는데 $Q(0)=0$이므로 그런 경우는 없다. $\therefore$참

㉢ $Q(0)=0$이므로 $Q(x)=ax\ (a\neq 0)$

$\therefore\ f(x)=ax(x^2-1)+x\ (a\neq 0)$　　$\therefore$거짓

19. 10차 다항식 $P(x)$가 $P(k)=\frac{k}{k+1}$(단, $k=0, 1, 2, \cdots, 10$)을 만족시킬 때, $P(11)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

해설

$P(k)=\frac{k}{k+1} \Rightarrow (k+1)P(k)-k=0$

$f(x)=(x+1)P(x)-x$라 하면

$f(x)$는 $f(0)=f(1)=f(2)=\cdots$

$=f(10)=0$인 다항식이다.

$\therefore\ f(x)=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$

또, $f(-1)=1=a(-1)(-2)\cdots(-11)$

$=-a\cdot 11!$(단, $11!=1\times 2\times\cdots\times 11$)

$\therefore\ a=-\frac{1}{11!}$

$f(11)=12P(11)-11$

$=-\frac{1}{11!}\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot\cdots\cdot 1=-1$

$\therefore\ P(11)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

20. 4차의 다항식 $f(x)$가 $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{2}{3}$, $f(3) = \frac{3}{4}$, $f(4) = \frac{4}{5}$를 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하면?

① 0　② 1　③ $\frac{5}{6}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

주어진 조건에 따라
$f(n) = \frac{n}{n+1} (n = 0, 1, 2, 3, 4)$
$(n+1)f(n) - n = 0$
$g(x) = (x+1)f(x) - x$로 놓으면
$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0$
그런데 $g(x)$는 다항식이므로 나머지정리에 의해
$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$를 인수로 갖는다.
또, $f(x)$가 4차식이므로 $g(x)$는 5차식이다.
$\therefore\ g(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) (a \neq 0) \cdots$ ㉠
그런데, $g(-1) = 1$이므로 ㉠에서
$g(-1) = -(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)a = 1$
$\therefore\ a = -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}$
$g(x) = (x+1)f(x) - x$
$= -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
$g(5) = 6f(5) - 5 = -\frac{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} = -1$
$\therefore\ f(5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$