1. 네 점 A$(-2, 3)$, B$(3, a)$, C$(b, 4)$, D$(2, 8)$을 꼭짓점으로 하는 □ABCD가 마름모가 되도록 하는 a, b 의 합을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

□ABCD가 마름모이므로
$\overline{AD} // \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$이다.
따라서 점 D는 점 A를 x축 방향으로 4만큼
y축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로
점 C도 점 B를 x축 방향으로 4만큼
y축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.
$\therefore\ (3+4,\ a+5) = (b,\ 4)$
$\therefore\ a = -1,\ b = 7$
$\therefore\ a + b = 6$

2. 점 A$(2,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선의 기울기를 α,β라 할 때, $\alpha\beta$의 값은 ?

① $\frac{8}{3}$ ② $-\frac{8}{3}$ ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

점 $(2,\ 2)$를 지나고 기울기 m인 접선을
$y-2=m(x-2)$ 즉, $mx-y-2m+2=0$
이라고 하면
원의 중심 $(0,\ 0)$에서 접선까지 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.
따라서 $1=\frac{|-2m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$,
$|-2m+2|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2-8m+3=0$
따라서 두 기울기의 곱은 근과 계수와의 관계에 의하여 1이다.

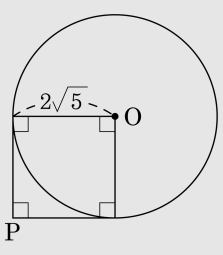
3. 원 $(x+1)^2+(y-6)^2=20$ 밖의 한 점 P에서 그은 접선이 수직으로 만날 때, 다음 중 점 P가 될 수 없는 점을 고르면?

① $(-7,\ 8)$ ② $(-3,\ 12)$ ③ $(1,\ 0)$

④ $(3,\ 1)$ ⑤ $(5,\ 4)$

해설

점 P에서 그은 접선이 수직으로 만나려면 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 정사각형이 되어야 한다.
이 때 점 P와 중심사이의 거리는 정사각형의 대각선 길이인 $2\sqrt{10}$ 이어야 한다. 원의 중심 $(-1,\ 6)$과 보기에 나와 있는 점들 사이의 거리를 구했을 때, 중심과 점 $(3,\ 1)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(3-(-1))^2+(1-6)^2}=\sqrt{41}$



4. 직선 $x+2y-3=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 $y=x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니, 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=1$ 의 넓이를 이등분하였다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=5$

해설

$x+2y-3=0 \Rightarrow x-2y-3=0$($x$ 축 대칭이동)
$\Rightarrow \quad y-2x-3=0$ ($y=x$ 대칭이동)
원의 넓이를 이등분하려면, 원의 중심이 직선 위에 있으면 된다.
따라서 중심의 좌표를 직선에 대입한다.
$\therefore\ a-2-3=0 \quad \therefore\ a=5$

5. $-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$ 을 인수분해했을 때, 각 인수들의 합이 될 수 없는 것은?

① $a+b$ ② $2a-2b$ ③ $2b-2a$
④ $2b-2c$ ⑤ 0

해설

a에 대한 내림차순으로 정리한다.

$-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$
$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-b^2c$
$=(c-b)a^2-(c-b)(c+b)a+bc(c-b)$
$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$
$=(c-b)(a-b)(a-c)\cdots$㉠
$=(a-b)(b-c)(c-a)\cdots$㉡
$=(b-c)(b-a)(a-c)\cdots$㉢
$=(c-a)(b-c)(b-a)\cdots$㉣

㉠식 : 세항을 모두 더하면 $2a-2b$
㉡식 : 세항을 모두 더하면 0
㉢식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2c$
㉣식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2a$

6. 방정식 $|x^2+(a-2)x-2|=1$ 의 모든 근의 합이 0 일 때 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$|x^2+(a-2)x-2|=1 \Leftrightarrow x^2+(a-2)x-2=\pm 1$

$x^2+(a-2)x-2=1$ 의 두 근을 α,β 라 하면 $\alpha+\beta=-(a-2)$ … ㉠

$x^2+(a-2)x-2=-1$ 의 두 근을 γ,δ 라 하면 $\gamma+\delta=-(a-2)$ … ㉡

㉠+㉡하면 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-2(a-2)$

모든 근의 합이 0 이므로 $a-2=0 \therefore a=2$

해설

$f(x)=x^2+(a-2)x-2$ 라 놓으면 y 절편이 -2 이므로 방정식 $|f(x)|=1$ 의 근을 α, β, γ, δ 라 할 때 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ 이기 위해서는 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다. (우함수)

$\therefore\ a-2=0,\ a=2$

7. x에 관한 이차방정식 $x^2+(m+1)x+(m^2-1)=0$이 실근 α,β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하면? (단, m은 실수이다.)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$D=(m+1)^2-4(m^2-1)\geq 0,\ 3m^2-2m-5\leq 0,\ (3m-5)(m+1)\leq 0$

$\therefore\ -1\leq m\leq \frac{5}{3}$

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-(m+1),\ \alpha\beta=m^2-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=\{-(m+1)\}^2-2(m^2-1)$

$=-m^2+2m+3=-(m-1)^2+4$

따라서, 구하는 최솟값은 0 ($m=-1$일 때)

8. 동일한 국제전화를 사용하는 두 개의 무역회사 A, B 가 있다. 국제전화의 요금제는 다음과 같다.
골드 요금제 : 기본요금 70000 원 , 1 분당 250 원
프리미엄 요금제 : 기본요금 40000 원, 1 분당 400 원
위 두 회사는 두 요금제 중 경제적으로 유리한 요금제를 선택하여 사용중에 있고 이에 따라 A 사는 프리미엄 요금제를 이용 중이고 B 사는 골드 요금제를 이용 중이다. 이번 달 두 회사가 사용한 국제전화 통화시간은 합해서 총 6 시간 40 분이라고 할 때, A 사는 국제전화를 최대 몇 분 이용했는지 구하여라.(단, 두 요금제 모두 분 단위 요금이다.)

▶ 답 : 분

▷ 정답 : 199 분

해설

6 시간 40 분은 총 400 분이고 A 사의 국제전화 이용시간을 x 분이라 하면 B 사의 이용시간은 $(400 - x)$ 분이다.
(1) A 사의 이용시간과 이용요금제를 통한 비교
(골드요금제)$= 70000 + 250x$
(프리미엄요금제)$= 40000 + 400x$
A 사는 프리미엄요금제를 이용 중이므로
$70000 + 250x > 40000 + 400x$
$\therefore\ x < 200$
(2) B 사의 이용시간과 이용요금제를 통한 비교
(골드요금제)$= 70000 + 250 \times (400 - x)$
(프리미엄요금제)$= 40000 + 400 \times (400 - x)$
B 사는 골드요금제를 이용중이므로
$170000 - 250x < 200000 - 400x$
$\therefore\ x < 200$
따라서 A 사는 국제전화를 최대 199 분 이용하였다.

9. 카드를 카드 상자에 넣으려고 하는데 카드를 10 장씩 넣으면 20 장이 남고, 11 장씩 넣으면 상자가 1 개 남고 어느 상자에는 6 장 이상 8 장 이하가 들어가게 된다. 이 때 카드의 장수로 <u>틀린</u> 것을 모두 골라라.

① 360장 ② 370장 ③ 380장
④ 390장 ⑤ 400장

해설

상자가 x 개 있다고 하면, 카드 수는 $(10x+20)$장이다.
11 장씩 넣을 경우 상자가 1 개가 남고 어느 상자에는 6 장 이상 8 장 이하가 들어가므로, $(x-2)$ 번째까지는 11 장씩 들어가지만 나머지 하나에는 6 장 이상 8 장 이하가 들어가게 된다.
나머지 한 상자에 6 장이 들어갈 경우를 식으로 나타내면 $11(x-2)+6$ 이고, 8 장이 들어갈 경우를 식으로 나타내면 $11(x-2)+8$ 이다.
카드 수는 상자에 11 장씩 들어가고 나머지 한 상자에는 6 장이 들어갈 경우보다 같거나 많고 8 장이 들어갈 경우보다 같거나 적으므로 식으로 나타내면 $11(x-2)+6 \le 10x+20 \le 11(x-2)+8$ 이다.

이를 연립부등식으로 나타내면 $\begin{cases} 11(x-2)+6 \le 10x+20 \\ 10x+20 \le 11(x-2)+8 \end{cases}$

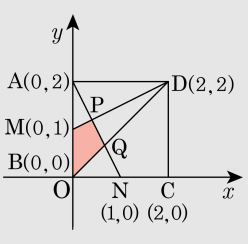
이다.

간단히 정리하면 $\begin{cases} x \le 36 \\ x \ge 34 \end{cases}$ 이다. 그러므로 x 의 범위는 $34 \le x \le 36$ 이다. 따라서 상자는 34 또는 35 또는 36 개가 될 수 있다.
카드의 수는 (상자의 수)$\times 10+20$이므로 360 또는 370 또는 380 장이다.

10. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서 두변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 중점을 각각 M, N이고, P, Q를 각각 $\overline{AN}$, $\overline{DM}$ 과 $\overline{AN}$, $\overline{DB}$의 교점이라 할 때, 사각형 BMPQ의 넓이는?

① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설



좌표를 이용하여

A(0, 2), B(0, 0), C(2, 0), D(2, 2)라고 표시하면,

M(0, 1), N(1, 0)이고, 직선 BQ, PQ, MP의 방정식은

각각 $y = x$, $y = -2x + 2$, $y = \frac{1}{2}x + 1$

따라서 $P\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$, $Q\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$이므로

□ BMPQ = △ ABN − △ AMP − △ BNQ

$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}$

11. 점 $(2,\ 3)$ 을 지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b)$ 라 하자. 이 때, 삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값은?(단, O 는 원점이고 $a,\ b$ 는 양수이다.)

① 8 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 16

해설

x 절편, y 절편이 각각 $(a,\ 0),\ (0,\ b)$ 이므로

직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이다.

이 때, 점$(2,\ 3)$ 을 지나므로

$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1\geq 2\sqrt{\frac{2}{a}\times\frac{3}{b}}$

$(\therefore\ a70, b70$산술기하평균$)$

따라서 $ab\geq 24$ 이고

$\Delta\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}ab\geq\frac{1}{2}\times 24=12$ 이다.

따라서, $\triangle$OAB 의 넓이의 최솟값은 12

12. 두 원 $x^2+y^2+2x-2my+m^2-4=0$, $x^2+y^2-2mx-2y+m^2-8=0$ 이 직교할 때 m의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $\sqrt{6}$

▷ 정답: $-\sqrt{6}$

해설

두 원의 교점에서 접선이 수직이므로
$(x+1)^2+(y-m)^2=5$
$(x-m)^2+(y-1)^2=9$
두 원의 교점과 각 원의 중심이 직각삼각형을 이루므로
$(m+1)^2+(1-m)^2=14$
$m^2=6$
$m=\pm\sqrt{6}$

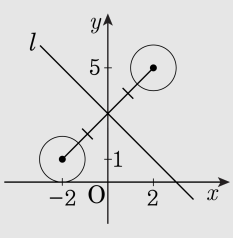
13. 두 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$, $(x-2)^2+(y-5)^2=1$ 은 직선 l 에 대하여 서로 대칭이다. 직선 l 의 방정식은?

① $y=-2x+3$ ② $y=-x+2$ ③ $y=x+3$

④ $y=-x+3$ ⑤ $y=2x-1$

해설

두 원의 중심 $(-2,\ 1)$, $(2,\ 5)$ 는 직선 l 에 대하여 대칭이므로 직선 l 은 두 원의 중심을 연결한 선분의 수직이등분선이다.



따라서 직선l 의 방정식을 $y=ax+b$ 라 하면

ⅰ) 두 원의 중심을 지나는 직선의 기울기가

$\dfrac{5-1}{2-(-2)}=1$ 이므로

$a=-1$

ⅱ) 두 원의 중심을 연결한 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+2}{2},\dfrac{5+1}{2}\right)$ 에서 $(0,3)$ 이므로 $b=3$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-x+3$ 이다.

14. $\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{5}} = k\times 10^{n}$ (단, $0<k<10$, n은 자연수)로 나타낼 때, n의 값을 구하면?

① 72 ② 71 ③ 70 ④ 69 ⑤ 68

해설

$\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{5}} = N$이라고 하면

$\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{15}} < N < \dfrac{10^{85}}{10^{15}}$

$\dfrac{10\times 10^{84}}{2\times 10^{15}} < N < \dfrac{10\times 10^{84}}{10^{15}}$

$5\times 10^{69} < N < 10\times 10^{69}$

따라서 $N = k\times 10^{69}(5<k<10)$

$\therefore\ n = 69$

15. A를 B로 나눈 몫을 Q, 나머지를 R라 하고, Q를 B'으로 나눈 몫은 Q', 나머지는 R'이라 한다. A를 BB'으로 나눈 나머지는? (단, 모든 문자는 자연수이다.)

① $R+R'B$ ② $R'+RB$ ③ RR'

④ R ⑤ R'

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면

$A = BQ + R$ ·····㉠

$Q = B'Q' + R'$ ·····㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$A = B(B'Q' + R') + R$

$= (BB')Q' + (R + R'B)$

$R + R'B$가 A를 BB'로 나눈 나머지가 되기 위해서는 $R + R'B < BB'$이어야 한다.

그런데 $R \le B-1$, $R' \le B'-1$이므로

$R + R'B \le (B-1) + (B'-1)B$

$= BB' - 1 < BB'$

따라서 A를 BB'으로 나눈 나머지는 $R + R'B$이다.

16. 다항식 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x^2+1) = x^4 + 5x^2 + 3$을 만족시킨다. $f(x^2-1)$을 구한 것은?

① $x^4 + 5x^2 + 1$　② $x^4 + x^2 - 3$　③ $x^4 - 5x^2 + 1$

④ $x^4 + x^2 + 3$　⑤ 답 없음

해설

$x^2 + 1 = t$라 하면 $x^2 = t - 1$

주어진 식에 대입하면

$f(t) = (t-1)^2 + 5(t-1) + 3$

$\therefore\ f(t) = t^2 + 3t - 1$

$f(x^2-1) = (x^2-1)^2 + 3(x^2-1) - 1$

$= x^4 + x^2 - 3$

17. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

④ $a=b$인 이등변삼각형

⑤ $b=c$인 이등변삼각형

해설

$\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$ 에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

(좌변)

$=\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$=(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2$

$=a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

따라서, $2a^2+2b^2-2c^2=0$이므로 $a^2+b^2=c^2$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

18. $x^2 - x - 1 = 0$ 일 때, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ 의 값과 $y + \frac{1}{y} = 1$ 일 때, $\frac{y^{10}+1}{y^2}$ 의 값은?

① 4, −1 ② 4, 18 ③ 8, −1 ④ 9, −1 ⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2 - x - 1 = 0$ 의 양변을 x로 나누면

$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$

$\therefore\ x - \frac{1}{x} = 1$

$\therefore\ x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$= 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

(2) $y + \frac{1}{y} = 1$ 일 때

$y + \frac{1}{y} = 1$ 에서 $\frac{y^2+1}{y} = 1$

$\therefore\ y^2 - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $(y+1)$을 곱하면 $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$

$y^3 + 1 = 0\ \therefore\ y^3 = -1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{y^{10}+1}{y^2} = \frac{(y^3)^3 \cdot y + 1}{y^2} = \frac{-y+1}{y^2}$

$= \frac{-y^2}{y^2} = -1$

19. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$=\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x-2}+\cdots+\frac{a_{2007}}{x-2007}$$

이 성립할 때, $a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 1997

④ 0 ⑤ -1997

해설

우변을 통분하면

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{2007})x^{2006}+\cdots}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$

주어진 등식은 항등식이므로 분자의 계수를 비교하면

$a_1+a_2+\cdots+a_{2007}=0$

20. 임의의 실수 x, y에 대해서

$$y^{12}+1 = x_0 + x_1(y-1) + x_2(y-1)^2 + x_3(y-1)^3 + \cdots + x_{12}(y-1)^{12}$$

이 성립할 때, $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11}$ 의 값은?

① 2^{11} ② 2^{12} ③ 2^{13} ④ 3^{11} ⑤ 3^{12}

해설

$y = 2$ 대입 : $2^{12} + 1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}$
$y = 0$ 대입 : $1 = x_0 - x_1 + x_2 - \cdots + x_{12}$
각변끼리 빼주면
$2^{12} = 2(x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11})$ 이므로
$x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11} = 2^{12-1} = 2^{11}$

21. x의 다항식 $f(x)$가 임의의 실수 u, v에 대하여 $f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$가 성립할 때, $f(3)$의 값은? (단, $f(1) = 1$이라고 한다.)

① -1 ② 2 ③ -2 ④ 1 ⑤ 5

해설

$f(u)f(v) = f(u+v) + f(u-v)$가
u, v에 대한 항등식이므로
$u = 1$, $v = 0$일 때도 이 등식이 성립한다.
$\therefore\ f(1)f(0) = f(1) + f(1)$
$f(1) = 1$이므로 $f(0) = 2$
또, $u = v = 1$일 때는
$f(1)f(1) = f(2) + f(0) \quad \therefore\ f(2) = -1$
$\therefore\ f(3) = f(2+1) = f(2)f(1) - f(2-1)$
$= f(2)f(1) - f(1) = -1 - 1$
$= -2$

22. 다항식 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)-2f(x+1)+f(x)=2x,\ f(0)=1,\ f(1)=0$이 성립할 때, $2a-b+2c-d$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$f(0)=1$이므로 $d=1$
$f(1)=0$이므로 $a+b+c=-1\cdots$①
$f(x+2)-2f(x+1)+f(x)=2x$에서
$x=-1$을 대입하면 $f(-1)=0$이므로
$-a+b-c=-1\cdots$②
$x=0$을 대입하면 $f(2)=-1$이므로
$8a+4b+2c=-2\cdots$③
①, ②, ③을 연립하여 풀면
$\therefore\ a=\frac{1}{3},\ b=-1,\ c=-\frac{1}{3},\ d=1$
$\therefore\ 2a-b+2c-d=0$

23. $f(x)=x^2+a$에 대하여 $f(x^2)$은 $f(x)$로 나누어 떨어진다. 이 때, $f(0)$를 구하면? (단, $a\neq 0$)

① 2 ② -2 ③ 0 ④ 1 ⑤ -1

해설

$f(x)=x^2+a$에서 $f(x^2)=x^4+a$
$f(x^2)$은 $f(x)$로 나누어 떨어지므로
$x^4+a=(x^2+a)Q(x)$
양변에 $x^2=-a$를 대입하면
$a^2+a=0, a(a+1)=0$
$\therefore\ a=-1(\because a\neq 0)$
$f(x)=x^2-1 \quad \therefore\ f(0)=-1$

24. 자연수 n 에 대하여 $i(1+i)^n$ 이 양의 실수일 때, 다음 중 n 의 값이 될 수 있는 것은?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

$i(1+i)^n = p(p>0)$, $(1+i)^n = \frac{p}{i} = -pi$

즉, $(1+i)^n =$ 음수 $\times i$ 이어야 한다.

이 때, n 이 홀수이면 $(1+i)^n$ 은 순허수꼴이 될 수 없다.

$n = 2k$ 일 때, $(1+i)^{2k} = (2i)^k$

$k = 4m$ 이면 $(2i)^{4m}$ 이 양의 정수이므로

$k = 4m+1 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+1} \Rightarrow$ 양수 $\times 2i$

$k = 4m+2 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+2} \Rightarrow$ 양수 $\times (-4)$

$k = 4m+3 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+3} \Rightarrow$ 양수 $\times (-8i)$

따라서 $k = 4m+3$, 즉 $n = 2k = 8m+6$ 일 때 조건을 만족한다.

주어진 수 중에서 알맞은 것은 22 이다.

25. $A(n) = i^n + (-1)^n n$, $f(n) = A(1) + A(2) + \cdots + A(n)$ 이라 할 때, $f(10)+f(11)+f(12)+f(13)$ 의 값은? (단, n은 자연수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $2i-2$ ② $2i+2$ ③ $2i-4$

④ $2i+4$ ⑤ $4i-2$

해설

$$
\begin{aligned}
f(10) &= (i-1) + (i^2+2) + (i^3-3) + \cdots + (i^{10}+10) \\
&= (i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{10}) \\
&\quad + (-1 + 2 - 3 + \cdots + 10) \\
&= (i-1) + (1+1+1+1+1) \\
&= i + 4 \\
f(11) &= f(10) + i^{11} - 11 \\
&= (i+4) + (-i-11) = -7 \\
f(12) &= f(11) + i^{12} + 12 \\
&= -7 + (1+12) = 6 \\
f(13) &= f(12) + i^{13} - 13 \\
&= 6 + (i-13) = i-7 \\
\therefore\ & f(10) + f(11) + f(12) + f(13) \\
&= (i+4) + (-7) + 6 + (i-7) = 2i-4
\end{aligned}
$$

26. 서로 다른 두 복소수 x, y 가 $x^2 - y = i,\ y^2 - x = i$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $2 - 3i$

해설

$x^2 - y = i \cdots ①,\ y^2 - x = i \cdots ②$ 에서

① - ② 하면 : $(x+y)(x-y) + (x-y) = 0,$

$(x-y)(x+y+1) = 0$

조건에서 $x \neq y$ 이므로 $x + y = -1$ 이다.

① + ②하면 $x^2 + y^2 - x - y = 2i$

식을 변형하면 $(x+y)^2 - 2xy - (x+y) = 2i$

$\therefore\ xy = 1 - i$

$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$

$= (-1)^3 - 3(1-i)(-1)$

$= 2 - 3i$

27. 방정식 $ax^2+ibx+c=0$에 대하여 다음 설명 중 타당한 것은?

① z가 주어진 방정식의 근이면 $\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

② z가 주어진 방정식의 근이면 $i\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

③ z가 주어진 방정식의 근이면 iz는 $ax^2+bx+c=0$의 근이다.

④ z가 주어진 방정식의 근이면 $-\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

⑤ z가 주어진 방정식의 근이면 $-i\bar{z}$는 $ax^2+bx+c=0$의 근이다.

해설

z가 주어진 방정식의 근이라면
$a,\ b,\ c$는 실수이므로 켤레복소수의 성질을 적용하면
$az^2+ibz+c=0,\ \overline{az^2+ibz+c}=0$
$a\overline{(z^2)}-ib\bar{z}+c=0,$
$a(-\bar{z})^2+ib(-\bar{z})+c=0$이므로
$-\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

28. 복소수 z_k (k 는 자연수)를 $z_1 = 1+i$, $z_2 = \bar{z}_1 + (1-i)$, $z_3 = \bar{z}_2 + (1-i), \cdots$ 와 같은 방법으로 정할 때, $\bar{z}_{100}$ 의 값은?(단, $i = \sqrt{-1}$, $\bar{z}$ 은 z 의 켤레복소수)

① $50+i$ ② $50-i$ ③ $100+2i$

④ $100-2i$ ⑤ $200+4i$

해설

$z_1 = 1+i$, $z_2 = (1-i)+(1-i) = 2-2i$,
$z_3 = 3+i, z_4 = 4-2i, z_5 = 5+i \cdots\cdots$
$\Rightarrow$ $z_{2n+1} = (2n+1)+i$, $z_{2n} = 2n-2i$
$\therefore \bar{z}_{100} = 100+2i$

29. $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $x = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$ 이라 할 때, $3x^3+4x^2+3x+3$ 의 값을 구하면?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -7 ② -8 ③ -9 ④ -10 ⑤ -11

해설

$$x = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{\dfrac{3-\sqrt{5}i}{2}}{\dfrac{-1-\sqrt{5}i}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}i}{-1-\sqrt{5}i}$$

$\therefore x = \dfrac{1+2\sqrt{5}i}{3}$ $3x-1 = (3x-1 = 2\sqrt{5}i)$, 양변을 제곱해서 정리하면

$3x^2-2x+7=0$

$3x^3+4x^2+3x+3$ 를 $3x^2-2x+7$ 로 나누면 몫이 $x+2$, 나머지가 -11 이다.

즉, $3x^3+4x^2+3x+3 = (3x^2-2x+7)(x+2)-11$

$3x^2-2x+7=0$ 이므로

$\therefore\ 3x^3+4x^2+3x+3 = -11$

30. 실수 $a,\ b,\ c$와 $p,\ q,\ r$에 대하여 $a>b>c,\ p<q<r,\ p+q+r=0$이 성립할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $p<0$　② $q<0$

③ $r>0$　④ $ap+bq+cr<0$

⑤ $p+q-r<0$

해설

$p<q<r$에서

$3p=p+p+p<p+q+r=0 \therefore\ p<0$

또한, $0=p+q+r<r+r+r=3r \therefore\ r>0$

$a>b,\ p<0$에서 $ap<bp$

$b>c,\ r>0$에서 $br>cr$

$\therefore\ ap+bq+cr<bp+bq+br=b(p+q+r)=0$

$p+q+r=0$에서 $p+q=-r$

$\therefore\ p+q-r=-2r<0$

31. $a,\ b,\ c,\ d$는 정수이고, $a < 2b,\ b < 3c,\ c < 4d,\ d < 100$을 만족시킬 때, a의 최댓값은?

① 2367 ② 2375 ③ 2391 ④ 2399 ⑤ 2400

해설

a의 최댓값은 $b,\ c,\ d$가 각각 최대일 때이다.
d의 최댓값은 99이고,
$c < 4 \cdot 99 = 396$이므로 c의 최댓값은 395,
$b < 3 \cdot 395 = 1185$ 이므로 b의 최댓값은 1184,
$a < 2 \cdot 1184 = 2368$ 이므로 a의 최댓값은 2367

32. 연립부등식 $x+2<4$ 와 $5x-8<17$ 의 해를 구하면?

① $x<2$ ② $x>5$ ③ $2<x\leq 5$

④ $2\leq x<5$ ⑤ 해가 없다.

해설

$x+2<4,\ x<2$

$5x-8<17,\ x<5$

따라서 $x<2$

33. $y = 2 - x$ 일 때, $-\frac{x}{6} < y \leq \frac{x}{2}$ 를 만족하는 음이 아닌 정수 x, y 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = 2$

▷ 정답: $y = 0$

해설

$y = 2 - x$ 를 $-\frac{x}{6} < y \leq \frac{x}{2}$ 에 대입하면

$-\frac{x}{6} < 2 - x \leq \frac{x}{2}$

$-\frac{x}{6} < 2 - x \cdots$ ㉠

$2 - x \leq \frac{x}{2} \cdots$ ㉡

㉠에서 $x < \frac{12}{5}$

㉡에서 $x \geq \frac{4}{3}$

$\therefore \frac{4}{3} \leq x < \frac{12}{5}$

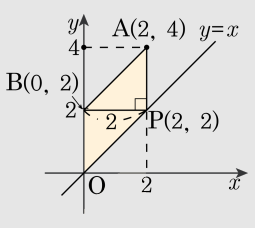
따라서 주어진 부등식을 만족하는 음이 아닌 정수 $x = 2$, $y = 0$ 이다.

34. 직선 $y = x$ 위의 점 P가 두 점 A$(2, 4)$, B$(0, 2)$로부터 같은 거리에 있을 때, 사각형 ABOP의 넓이는? (단, O는 원점)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

점 P의 좌표를 $(a,\ a)$으로 놓으면
$\overline{AP} = \overline{BP}$에서 $\sqrt{(a-2)^2 + (a-4)^2} = \sqrt{a^2 + (a-2)^2}$
양변 제곱하여 정리하면
$2a^2 - 12a + 20 = 2a^2 - 4a + 4,\ 8a = 16$
$\therefore\ a = 2$
따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ 2)$이므로 다음 그림에서



(□ABOP의 넓이)
= (△OBP의 넓이) + (△ABP의 넓이)
$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 4$

35. 좌표평면 위에 세 지점 $\mathrm{P}(1,5)$, $\mathrm{Q}(-2,-4)$, $\mathrm{R}(5,3)$이 있다. 이들 세 지점에서 같은 거리에 있는 지점에 물류창고를 설치하려고 한다. 이때, 창고의 위치의 좌표는?

① $(0,-1)$ ② $(0,0)$ ③ $(0,1)$

④ $(1,0)$ ⑤ $(1,1)$

해설

$\mathrm{A}(a,\ b)$라고 하면

$(a-1)^2+(b-5)^2=\overline{\mathrm{AP}}^2 \quad \cdots$ ①

$(a+2)^2+(b+4)^2=\overline{\mathrm{AQ}}^2 \quad \cdots$ ②

$(a-5)^2+(b-3)^2=\overline{\mathrm{AR}}^2 \quad \cdots$ ③

$\overline{\mathrm{AP}^2}=\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AR}}^2$ 이므로

①, ② 연립하면 $a+3b=1$

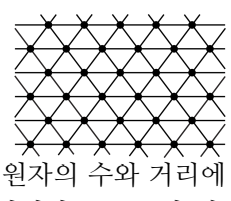
①, ③ 연립하면 $2a-b=2$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

$\therefore\ (1,\ 0)$

∴ 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심을 구하는 것과 같다.

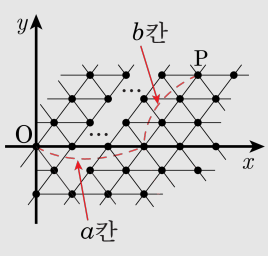
36. 어떤 물질은 원자를 구로 나타낼 경우 똑같은 구들을 규칙적으로 배열하여 얻은 정육각형 격자구조를 갖는다. 다음 그림은 이 격자구조의 한 단면에 놓여있는 원자의 중심을 연결한 것이다. 이 구조에서 한 원자의 에너지는 인접한 원자의 수와 거리에 영향을 받는다. 가장 인접한 원자의 중심간의 거리가 모두 1 일 때, 동일 평면상에서 고정된 한 원자와 중심사이의 거리가 $\sqrt{7}$ 인 원자의 개수는?



① 4 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설

다음 그림과 같이 좌표축을 잡아서 점 O 에서 우측으로 a 칸 우상쪽으로 b 칸 이동한 점 P 를 생각하자.



이 때 $\overline{\mathrm{OP}}^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2$

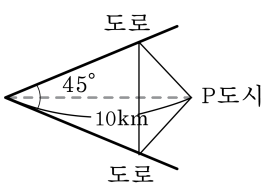
$= a^2 + ab + b^2 = 7$

$4a^2+4ab+4b^2 = (2a+b)^2+3b^2 = 28$

가능한 $3b^2 = 0, 3, 12, 27$ 일 때

$(2a+b)^2 = 28, 25, 16, 1$

37. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 45° 의 각도로 교차하고 있다. 교차점에서 10 km 떨어진 도시 P 와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?

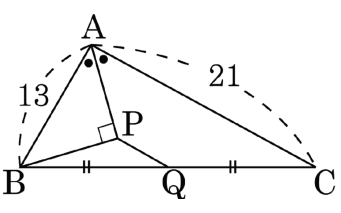


① $10\sqrt{2}$ km ② $12\sqrt{2}$ km ③ $14\sqrt{2}$ km
④ $16\sqrt{2}$ km ⑤ $18\sqrt{2}$ km

해설

점 P 의 두 도로에 대한 대칭점을 각각 P', P'' 이라 하면 $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = \overline{P'Q} + \overline{QR} + \overline{RP''}$ 이고$\overline{P'P''}$가 최단거리가 된다. $\triangle P'OP''$ 가 직각이등변 삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{P'P''}^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \quad \therefore \ \overline{P'P''} = 10\sqrt{2}$

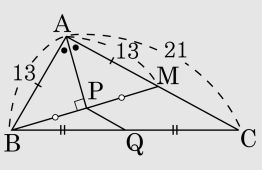
38. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$에서 선분 AP는 $\angle BAC$의 이등분선, $\overline{AP} \perp \overline{BP}$ 이고 점 Q는 변 BC의 중점이다. $\overline{AB} = 13$, $\overline{AC} = 21$ 일 때, $\overline{PQ}$의 길이는?



① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$\overline{BP}$ 의 연장선이 $\overline{AC}$ 와 만나는 점을 M 이라 하자.



$\angle BAP = \angle MAP$, $\overline{AP}$는 공통,
$\angle APB = \angle R$ 이므로 $\triangle ABP \equiv \triangle AMP$
$\overline{AB} = \overline{AM} = 13$ 이다.
따라서 $\overline{MC} = 8$
$\triangle BCM$ 에서 $\overline{PQ} : \overline{MC} = 1 : 2$ 이므로 $\overline{PQ} = 4$

39. 다음 조건을 만족하는 집합 A 의 원소를 작은 순서로 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 으로 나타낼 때, $a_2 + a_3 + a_5$ 의 값을 구하여라.

• 집합 A 의 원소는 항상 1 보다 크거나 같다. • $a_1 = 1$, $x \in A$ 이면, $\frac{3}{2} \times x \in A$ 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{141}{16}$

해설

$a_1 = 1$ 이면 $a_2 = \frac{3}{2} \times a_1$ 이고 이러한 방식으로 집합 A 를 구하면,

$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \cdots, \left(\frac{3}{2}\right)^{(n-1)} \times a_1\right\}$

,

$a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{9}{4}$, $a_5 = \frac{81}{16}$ 이다.

$\therefore a_2 + a_3 + a_5 = \frac{141}{16}$

40. 빈이의 주머니에 0, 1, 2의 숫자가 적힌 카드가 들어 있고, 혜교의 주머니에는 1, 2, 3의 숫자가 적힌 카드가 들어있다. 둘이서 카드를 하나씩 꺼낼 때, 두 숫자를 곱하여 생기는 숫자들을 원소나열법으로 나타내어라.

▶ 답:

▷ 정답: {0, 1, 2, 3, 4, 6}

해설

빈이의 주머니에 들어 있는 숫자 0, 1, 2를 하나씩 차례로 혜교의 카드 1, 2, 3에 곱하면

$0 \times 1 = 0$, $0 \times 2 = 0$, $0 \times 3 = 0$

$1 \times 1 = 1$, $1 \times 2 = 2$, $1 \times 3 = 3$

$2 \times 1 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $2 \times 3 = 6$ 이다.

여기서 생기는 숫자는 모두 0, 1, 2, 3, 4, 6이므로 원소나열법으로 나타내면 {0, 1, 2, 3, 4, 6} 이다.

41. 집합 $S = \{a,\ \{a\},\ \{a,\ b\},\ b,\ \{c\},\ c,\ d\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것만 골라라.

㉠ $\{a\} \subset S$	㉡ $\{b\} \in S$
㉢ $\{b,\ c,\ d\} \in S$	㉣ $c \in S,\ d \in S$
㉤ $\{c,\ d\} \subset S$	㉥ $S \subset \{a,\ b,\ c,\ d\}$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉠

▷ 정답: ㉣

▷ 정답: ㉤

해설

집합 S 는 집합 안에 또 다른 집합을 원소로 가진 집합이다.
따라서 집합 S 의 원소는
$\{a,\ \{a\},\ \{a,\ b\},\ b,\ \{c\},\ c,\ d\}$ 가 된다.
㉠ $\{a\} \subset S \ \rightarrow\ \{a\}$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.
㉡ $\{b\} \in S \ \rightarrow\ b$ 는 집합 S 의 원소이지만 $\{b\}$ 는 집합 S 의 원소가 아니다.
㉢ $\{b,c,d\} \in S \ \rightarrow\ b,c,d$ 는 모두 집합 S 의 원소이므로 $\{b,c,d\} \subset S$ 가 되어야 한다.
㉣ $c \in S, d \in S \ \rightarrow\ c,d$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.
㉤ $\{c,d\} \subset S \ \rightarrow\ c,d$ 는 집합 S 의 원소이고 $\{c,d\}$ 는 집합 S 의 부분집합이 되므로 옳다.
㉥ $S \subset \{a,\ b,\ c,\ d\} \rightarrow$ 집합 S 는 $\{a,b,c,d\}$ 의 부분집합이 될 수 없다.
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉣, ㉤이다.

42. 집합 $N = \{x \mid x\text{는 } 100\text{이하의 자연수}\}$ 의 부분집합 $A_n = \{x \mid x\text{는 } n\text{의 배수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

㉠ $A_2 \subset A_4$
㉡ $A_3 \subset A_4 = A_{12}$
㉢ $A_4 \cup A_6 \subset A_2$
㉣ $(A_2 \cap A_3) \cup (A_3 \cap A_4) = A_{12}$
㉤ $n(A_4) > n(A_2)$
㉥ $A_3 - A_4 = A_3 - A_{12}$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉡

▷ 정답: ㉢

▷ 정답: ㉥

해설

㉠$A_2 \subset A_4 \rightarrow A_4 \subset A_2$

㉡$A_3 \subset A_4 = A_{12} \rightarrow$ 옳다.

㉢$A_4 \cup A_6 \subset A_2 \rightarrow A_4 \subset A_2$ 이고 $A_6 \subset A_2$ 이므로 옳다.

㉣$(A_2 \cap A_3) \cup (A_3 \cap A_4) = A_{12} \rightarrow A_6 \cup A_{12} = A_6$ 이므로 옳지 않다.

㉤$n(A_4) > n(A_2) \rightarrow A_4 \subset A_2$ 이므로 옳지 않다.

㉥$A_3 - A_4 = A_3 - A_{12} \rightarrow 3$ 의 배수에서 4 의 배수인 것을 제외한 집합은, 3 의 배수에서 12 의 배수를 제외한 집합과 같으므로 옳다.

43. 민주, 한결, 은하, 겨레 4명의 학생은 각자가 적당한 시간에 봉사활동에 다녀오기로 하였으나 그 중 한명이 참석하지 못하였다. 그런데 네 명의 학생은 아래와 같이 서로 엇갈린 주장을 하고 있다. 이 진술 중 오직 하나만이 옳은 것일 때, 참석하지 못한 학생과 옳게 진술한 학생은?

민주 : 한결이가 빠졌어. 한결 : 민주가 한 말은 거짓말이야. 은하 : 민주가 빠졌어. 겨레 : 나는 안 빠졌어.

① 겨레, 한결　② 겨레, 민주　③ 겨레, 은하
④ 민주, 한결　⑤ 민주, 은하

해설

㉠ 민주가 참 : 한결, 겨레가 빠진것이 되어 모순
㉡ 한결이 참 : 겨레가 빠짐
㉢ 은하가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
㉣ 겨레가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
∴ 한결의 진술이 참, 겨레가 참석하지 못함.

44. 다음 보기 중 두 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것의 개수는?

㉠ $p : xy+1 > x+y > 2$ $q : x > 1,\ y > 1$
㉡ $p : x^2 > y^2$ $q : \|x\| > \|y\|$
㉢ $p : \|x\| + \|y\| = 0$ $q : x^2 + y^2 = 0$
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
㉣ $p : (A \cup B) \cap (B - A)^C = A \cup B$, $q : B \subset A$
㉤ $p : (A \cup B) - (A \cap B) = B$, $q : A - B = \phi$
㉥ $p : (A \cup B) - (A \cap B) = B$, $q : A^C = U$

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉥이 필요충분조건이다.

㉠ : $xy+1 > x+y > 2 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1, y > 1$ 또는 $x < 1, y < 1$

그런데 $x + y > 2$ 이므로 $x > 1, y > 1$ $\therefore p \Rightarrow q$ 이고 역도 성립한다.

㉤ $(A \cup B) - (A \cap B) = B \Leftrightarrow A = \phi$

45. 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여 항상 $x^2+2xy+y^2+4x+ay+b>0$이 성립할 때, a의 값과 b의 최소 정수값의 합을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

x 에 대하여 정리하면 $x^2+2(y+2)x+y^2+ay+b>0\cdots$㉠

㉠이 임의의 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로

$\frac{D}{4}=(y+2)^2-(y^2+ay+b)<0$

$\therefore (4-a)y+4-b<0\cdots$㉡

또, ㉡이 임의의 실수 y 에 대하여 성립해야 하므로

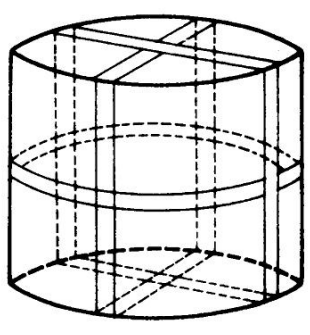
$4-a=0,\ 4-b<0$

$\therefore a=4,\ b>4$

$a=4,\ b$ 의 최소정수는 5

$\therefore a+(b$ 의 최소정수값$)=9$

46. 길이가 60 cm 인 장식용 테이프를 가지고 원기둥 모양의 선물을 장식하려 한다. 테이프를 3 개로 잘라 아래의 그림과 같이 선물의 표면에 붙여서 장식할 때, 다음은 이 테이프로 장식할 수 있는 선물의 최대 부피를 구하는 과정이다. 그런데 아래 풀이 과정은 잘못되었다. 어디에서 잘못이 일어났는가?



선물의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h라 하면
$2 \times 2(2r + h) + 2\pi r = 60 \cdots$㉠
한편, (산술평균) $\geq$ (기하평균)이므로 $\cdots$㉡
$8r + 4h + 2\pi r \geq 3^3 \sqrt{8r \cdot 4h \cdot 2\pi r} \cdots$㉢
즉, $60 \geq 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot^3 \sqrt{\pi r^2 h}$
따라서, $\pi r^2 h \leq 125 \cdots$㉣
이상에 의해, 구하려는 최대 부피는 $125\,\text{cm}^3$이다. $\cdots$㉤

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

$8r + 4h + 2\pi r\ 3^3 \sqrt{8r \cdot 4h \cdot 2\pi r}$에서
등호는 $8r = 4h = 2\pi r$일 때 성립한다.
그런데 $8 \neq 2\pi$이므로 최대 부피는 $125\,\text{cm}^3$가 아니다.

47. 모든 실수 x 에 대하여 정의된 함수 $f(x)=[x]+[-x]$ 의 치역은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① $\{-1,\ 0\}$ ② $\{-1,\ 1\}$ ③ $\{0,\ 1\}$
④ $\{-1,\ 0,\ 1\}$ ⑤ $\{0\}$

해설

정수 n 에 대하여
(i) $x=n$ 이면
$f(x)=[x]+[-x]=n+(-n)=0$
(ii) $n<x<n+1$ 이면
$-n-1<-x<-n$ 이므로 $[-x]=-n-1$
$\therefore\ f(x)=[x]+[-x]=n+(-n-1)=-1$
(i), (ii)에서 구하는 치역은 $\{-1,\ 0\}$ 이다.

48. 집합 $X = \{x \mid a \le x \le b\}$에서 실수 전체의 집합 R로의 함수 f는 $f(x) = \dfrac{x^2+5}{6}$이다. f의 정의역과 치역이 일치할 때, $a+b$의 값은? (단, $0 < a < b$)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(a) = \dfrac{a^2+5}{6}$, $f(b) = \dfrac{b^2+5}{6}$ 이고

$0 < a < b$ 이므로 $f(a) < f(b)$

따라서, 함수 f 의 치역은

$f(X) = \{y \mid f(a) \le y \le f(b)\}$

그런데 정의역과 치역이 일치하므로

즉 $f(X) = X$ 이므로 $f(a) = a$, $f(b) = b$

$f(a) = a$ 에서 $\dfrac{a^2+5}{6} = a$,

$a^2 - 6a + 5 = 0$, $(a-1)(a-5) = 0$

$\therefore\ a = 1$ 또는 $a = 5$

$f(b) = b$ 에서 $\dfrac{b^2+5}{6} = b$,

$b^2 - 6b + 5 = 0$, $(b-1)(b-5) = 0$

$\therefore\ b = 1$ 또는 $b = 5$

그런데 $a < b$ 이므로 $a = 1$, $b = 5$

$\therefore\ a + b = 6$

49. 모든 실수 x 에 대하여 식 $x^2f(x)+f(1-x)=x^4-2x$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

식 $x^2f(x)+f(1-x)=x^4-2x$ 에서
$x=2$ 를 대입하면
$4f(2)+f(-1)=12 \cdots$ ㉠
$x=-1$ 을 대입하면
$f(-1)+f(2)=3 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 에서 ㉠ − ㉡ 을 하면 $3f(2)=9$
$\therefore\ f(2)=3$

50. 두 집합 $X=\{0,1,2\}$, $Y=\{0,1,2,3,4,5\}$에서 다음 두 조건을 만족하는 함수 f 의 개수를 구하여라.

(ⅰ) $f : X \to Y$ 는 일대일 함수 (ⅱ) $x \neq y$ 인 X 의 원소 x, y 에 대해 $f(xy)=f(x)f(y)$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

조건 (ⅱ)에서 나타날 수 있는 경우는

$f(0\cdot 1)=f(0)=f(0)\cdot f(1)$ ⋯㉠

$f(0\cdot 2)=f(0)=f(0)\cdot f(2)$ ⋯㉡

$f(1\cdot 2)=f(2)=f(1)\cdot f(2)$ ⋯㉢

㉠, ㉡에서 $f(0)\{f(1)-f(2)\}=0$ 이고

조건 (ⅰ)로 부터 $f(0)=0$ 이고

㉢에서 $f(2)\{f(1)-1\}=0$

$f(2)\neq 0$ 이므로 $f(1)=1$, $f(2)=2,3,4,5$ 가 될 수 있으므로

함수의 개수는 4 개

51. 함수 $f(x) = 2x - [2x]$ 에 대하여 $f\left(\frac{1}{9}\right)$, $f\left(f\left(\frac{1}{9}\right)\right)$, $f\left(f\left(f\left(\frac{1}{9}\right)\right)\right)$, $\cdots$ 의 집합을 S 라고 할 때, 집합 S 의 원소의 개수는? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다. 예를 들면 $[2] = 2, [2.6] = 2$ 이다.)

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{2}{9} - \left[\frac{2}{9}\right] = \frac{2}{9}$

$f\left(f\left(\frac{1}{9}\right)\right) = f\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9} - \left[\frac{4}{9}\right] = \frac{4}{9}$

$f\left(f\left(f\left(\frac{1}{9}\right)\right)\right) = f\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{8}{9} - \left[\frac{8}{9}\right] = \frac{8}{9}$

같은 방법으로 계속하면

$f\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{16}{9} - \left[\frac{16}{9}\right] = \frac{7}{9}$

$f\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{14}{9} - \left[\frac{14}{9}\right] = \frac{5}{9}$

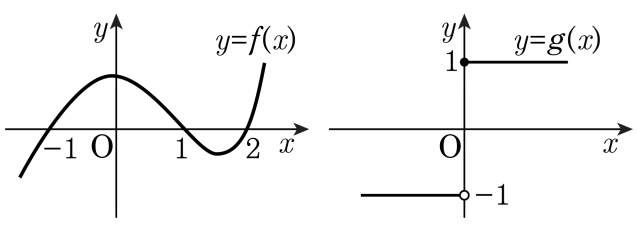
$f\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{10}{9} - \left[\frac{10}{9}\right] = \frac{1}{9}$

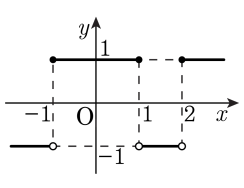
$\cdots\cdots\cdots$

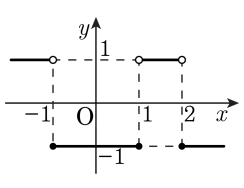
즉, 6개의 수 $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{7}{9}, \frac{5}{9}, \frac{1}{9}$ 이 반복된다.

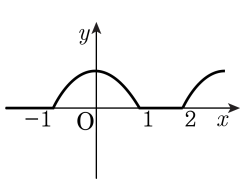
따라서 $S = \left\{\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right\}$ 이므로 집합 S 의 원소의 개수는 6개 이다.

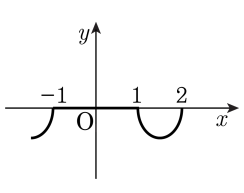
52. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f, g 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 의 그래프는?

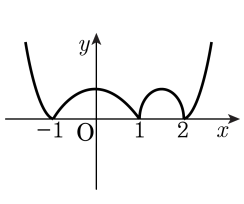


① 

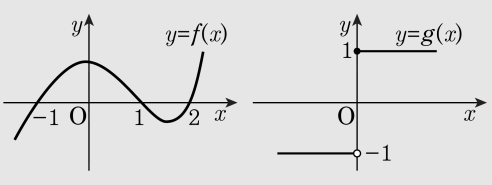
② 

③ 

④ 

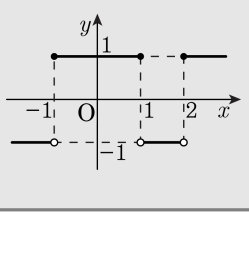
⑤ 

해설



$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$ 이므로

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & (-1 \leq x \leq 1,\ 2 \leq x) \\ -1 & (x < -1,\ 1 < x < 2) \end{cases}$$



53. 토정비결에서는 다음 조건에 맞는 3개의 수 A, B, C로 각 사람의 그 해의 운세 [A][B][C]를 결정한다.

> (1) A는 태어난 해에 해당하는 수를 3으로 나눈 나머지
> (2) B는 태어난 달에 해당하는 수를 6으로 나눈 나머지
> (3) C는 태어난 날에 해당하는 수를 8로 나눈 나머지

토정비결에 있는 서로 다른 운세 [A][B][C]는 모두 몇 가지인가? (단, 나머지가 0인 경우에는 나누는 수를 나머지로 한다)

① 64가지 ② 144가지 ③ 127가지
④ 216가지 ⑤ 254가지

해설

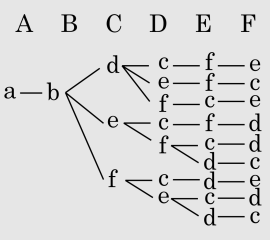
A는 1, 2, 3 총 3가지, B는 1부터 6까지 총 6가지, C는 1부터 8까지 총 8가지
따라서 총 가지 수는 $3 \times 6 \times 8 = 144$가지

54. 수험생 6 명의 수험표를 섞어서 임의로 1 장씩 나누어 줄 때 6 명 중 어느 2 명이 자기 수험표를 받을 경우의 수를 구하면?

① 60 가지　② 85 가지　③ 120 가지
④ 135 가지　⑤ 145 가지

해설

A, B, C, D, E, F 의 6 명과 수험표를 a, b, c, d, e, f 라 하고 수형도를 그린다.



$\therefore (A, B)$ 두 명만이 자기 수험표를 받는 경우의 수가 9 가지이고, 또 2 명이 자기 수험표를 받는 경우의 수는 $6 \times 5 \div 2 = 15$ 가지이다.

$\therefore$ 모든 경우의 수는 $9 \times 15 = 135$(가지)

55. 정수는 대학생이 되면 해외로 배낭여행을 하기로 하고, 가고 싶은 나라를 대륙별로 아래 표와 같이 적어보았다. 정수는 두 대륙을 여행하되 먼저 방문하는 대륙에서는 3개국을 여행하고, 두 번째 방문하는 대륙에서는 2개국을 여행하기로 하였다. 정수가 계획할 수 있는 배낭여행의 경우의 수를 구하여라. (단, 방문국의 순서는 고려하지 않는다.)

대륙	가고 싶은 나라
아시아	일본, 중국, 인도, 태국
유럽	프랑스, 이탈리아, 스페인, 그리스
아메리카	미국, 멕시코, 브라질
아프리카	이집트, 리비아, 튀니지

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 126 가지

해설

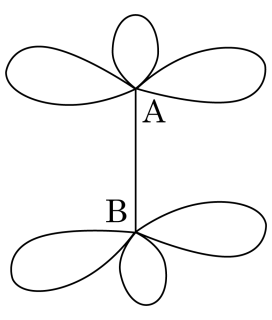
(ⅰ) 4 개국이 있는 2 대륙을 여행하는 경우 :
$2 \times {}_4C_3 \times {}_4C_2 = 2 \times 4 \times 6 = 48$

(ⅱ) 3 개국이 있는 2 대륙을 여행하는 경우 :
$2 \times {}_3C_3 \times {}_3C_2 = 2 \times 1 \times 3 = 6$

(ⅲ) 4 개국이 있는 대륙과 3 개국이 있는 대륙을 여행하는 경우 :
$4 \times ({}_4C_3 \times {}_3C_2 + {}_3C_3 \times {}_4C_2) = 72$

이상을 정리하면 126

56. 다음 그림과 같이 도형을 그리는데 연필을 떼지 않고 한 번에 그리는 방법의 수는? (A 또는 B 에서 시작한다.)



① 4588 ② 4592 ③ 4600 ④ 4608 ⑤ 4612

해설

A 에서 B 로 가는 방법의 수를 생각한다.
C_1, C_2, C_3 의 순으로 그리는 방법 :
각각을 시계 방향, 반시계 방향으로 그릴 수 있으므로
$2 \times 2 \times 2 = 8$
C_1, C_2, C_3 를 선택하여 배열하는 방법의 수 : $3! = 6$
따라서 $(8 \times 6)^2 = 2304$
그런데 B 에서 A 로 그리는 방법도 있으므로
$2304 \times 2 = 4608$

57. 좌표평면 위의 6 개의 평행한 직선 $x = m$ $(m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ 와 5 개의 평행한 직선 $y = n$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 로 만들어지는 직사각형 중에서 점 $A\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ 를 포함하지 않는직사각형의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 102 개

해설

6 개의 평행한 직선 $x = m$ $(m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ 와
5 개의 평행한 직선 $y = n$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 로
만들어지는 직사각형의 총 개수는

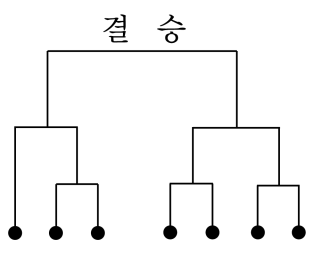
$${}_6C_2 \times {}_5C_2 = \frac{6\times5}{2} \times \frac{5\times4}{2} = 150 \text{ (개)}$$

이 중에서 점 $A\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ 를 포함하는 직사각형의

개수는 $({}_2C_1 \times {}_4C_1) \times ({}_2C_1 \times {}_3C_1) = 8 \times 6 = 48$ (개)

따라서, 구하는 직사각형의 개수는 $150 - 48 = 102$ (개)

58. 7 개의 팀이 아래 그림과 같이 한 개 팀에게 부전승을 허용하여 토너먼트 방식으로 경기를 하려고 한다. 시합을 하는 방법의 수는?



① 315 ② 378 ③ 396 ④ 412 ⑤ 446

해설

7 개의 팀을 4 팀, 3 팀으로 나누는 경우의 수는
${}_7C_4 \times {}_3C_3 = 35$ (가지)
아래 왼쪽 조를 완성하는 방법의 수는
${}_3C_2 \times {}_1C_1 = 3$ (가지)
아래 오른쪽 조를 완성하는 방법의 수는
${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$ (가지)
따라서 구하는 방법의 수는 $35 \times 3 \times 3 = 315$ (가지)

59. 다음 그림은 2008 년 9 월 달력의 일부분이다.

S	*M*	*T*	*W*	*T*	*F*	*S*
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20

대원이는 9 월 1 일부터 9 월 20 일까지 일주일에 2회씩 모두 6 번을 학교에서 보충학습을 하려고 한다. 보충학습을 하는 6 일의 요일을 모두 다르게 정하는 방법의 수는? (단, 일요일에는 보충학습을 하지 않는다.)

① 30 ② 45 ③ 60 ④ 90 ⑤ 120

해설

9 월 셋째 주의 월, 화, 수, 목, 금, 토의 6 일 중에서 이틀을 정하는 방법의 수는

$${}_6C_2 = \frac{6\times 5}{2\times 1} = 15 \text{ (가지)}$$

둘째 주에는 셋째 주에서 정한 요일을 제외하고 이틀을 정하는 방법의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4\times 3}{2\times 1} = 6 \text{ (가지)}$$

첫째 주에는 남은 요일로 결정되므로 이틀을 정하는 방법의 수는 1가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는 $15\times 6\times 1 = 90$ (가지)

60. 1, 2, 3, 4, 5, 6 의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6 개의 상자와 6 개의 공이 있다. 한 상자에 하나씩 임의로 공을 담을 때, 상자에 적힌 숫자와 공에 적힌 숫자가 일치하는 상자의 수가 3 개인 경우의 수는?

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

해설

6 개의 상자 중에서 상자에 적힌 숫자와 공에 적힌 숫자가 일치하는 3 개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$ (가지) 이다.
이때, 예를 들어 선택된 상자가 1, 2, 3 이라 하면 나머지 4, 5, 6 상자는 공에 적힌 숫자와 모두 달라야 하므로 4, 5, 6 상자에 각각 (5, 6, 4) 또는 (6, 4, 5) 의 공이 차례로 들어가야 하므로 2 가지 경우가 있다.
그런데 나머지 경우에 대하여도 각각 2 가지씩 존재하므로 구하는 경우의 수는 $20 \times 2 = 40$ (가지)