

1. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위는?

① $k < 1$

② $1 < k < 3$

③ $k < 3$

④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$$

$$k^2 - 6k + 5 > 0, (k-1)(k-5) > 0$$

$$\therefore k < 1 \text{ 또는 } k > 5$$

2. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2, k < -1$

② $k > 3, k < -1$

③ $k > 1, k < -1$

④ $k > 3, k < -2$

⑤ $k > 3, k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로

$$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1 - k)x + 1 = 0 \text{에서}$$

$$D = (1 - k)^2 - 4 > 0$$

$$k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1) > 0$$

$$\therefore k > 3 \text{ 또는 } k < -1$$

3. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + 1$ 의 최댓값과 최솟값을 차례로 구하면?

① 4, 없다

② 1, 없다

③ -1, 없다

④ 없다, 4

⑤ 없다, 1

해설

$y = -3x^2 - 6x + 1 = -3(x^2 + 2x) + 1 = -3(x + 1)^2 + 4$
따라서 최댓값은 4, 최솟값은 없다.

4. 이차함수 $y = -x^2 + 4x - 3$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$y = -x^2 + 4x - 3 = -(x - 2)^2 + 1$$

최댓값 $m = 1$

$$y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{3}(x + 3)^2$$

최솟값 $n = 0$

$$\therefore mn = 1 \times 0 = 0$$

5. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad (0 \leq x \leq 4)$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 5

▷ 정답 : 최솟값 -4

해설

먼저, 주어진 식을 $y = a(x - m)^2 + n$ 의 꼴로 변형하여 그래프를 그린 다음 주어진 구간 안에서 가장 높은 점과 가장 낮은 점을 조사한다.

$$y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$$

꼭짓점 : $x = 1$ 일 때 $y = -4$

$$\text{양끝점 : } \begin{cases} x = 0 \text{ 일 때 } y = -3 \\ x = 4 \text{ 일 때 } y = 5 \end{cases}$$

$x = 4$ 에서 최댓값 5, $x = 1$ 에서 최솟값 -4

6. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표가 6, b 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$ 의 그래프와
 x 축과의 교점의 x 좌표는

이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$ 의 실근이다.

$x^2 - 8x + a = 0$ 에 $x = 6$ 을 대입하면

$36 - 48 + a = 0$ 에서 $a = 12$

따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$ 에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$

$x = 2$ 또는 $x = 6$

$\therefore b = 2 \therefore a + b = 14$

7. 이차함수 $y = x^2 + (k - 3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$

② $-1 < k < 8$

③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$

⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가

x 축과 만나지 않으려면

이차방정식 $x^2 + (k - 3)x + k = 0$ 이

실근을 갖지 않아야 하므로

$$D = (k - 3)^2 - 4k < 0$$

$$k^2 - 10k + 9 < 0, (k - 1)(k - 9) < 0$$

$$\therefore 1 < k < 9$$

8. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 2

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 13

해설

$$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$$\therefore (a + 2)^2 + 2(b - 1)^2 = 0$$

이 때, a, b 가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

9. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 10$ 의 최댓값을 M , $y = 3x^2 + 6x - 5$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 2x + 10 \\ &= -(x-1)^2 + 11, \quad M = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 + 6x - 5 \\ &= 3(x+1)^2 - 8, \quad m = -8 \end{aligned}$$

$$\therefore M + m = 11 - 8 = 3$$

10. 이차함수 $y = -(x-1)(x+3)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$y = -(x-1)(x+3)$$

$$= -x^2 - 2x + 3$$

$$= -(x+1)^2 + 4$$

$x = -1$ 일 때, 최댓값 4 를 가진다.

11. 이차함수 $y = -x^2 + 6x + 5$ 의 최댓값을 M , $y = 2x^2 - 12x - 4$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하면?

① 28

② 30

③ 32

④ 34

⑤ 36

해설

$$\begin{aligned}y &= -x^2 + 6x + 5 \\&= -(x - 3)^2 + 14 \therefore M = 14 \\y &= 2x^2 - 12x - 4 \\&= 2(x - 3)^2 - 22 \therefore m = -22 \\\therefore M - m &= 14 + 22 = 36\end{aligned}$$

12. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11

② 21

③ 25

④ 81

⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

13. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

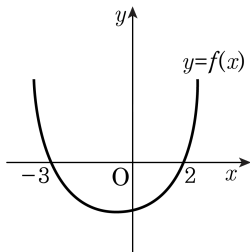
① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개



해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로

방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은

(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2 \quad \therefore x = \pm \sqrt{2}i$

(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3 \quad \therefore x = \pm \sqrt{3}$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개 이다.

14. 이차함수 $y = x^2 + 3x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = -x + 3$ 의 두 교점의 좌표를 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 할 때, y_1y_2 의 값은?

① 11

② 13

③ 15

④ 17

⑤ 19

해설

두 교점의 x 좌표 x_1, x_2 는

방정식 $x^2 + 3x + 1 = -x + 3$ 의 실근이다.

$x^2 + 4x - 2 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1 + x_2 = -4, x_1x_2 = -2$$

$$\begin{aligned}\therefore y_1y_2 &= (-x_1 + 3)(-x_2 + 3) \\ &= x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 \\ &= -2 + 12 + 9 = 19\end{aligned}$$

15. x 에 대한 방정식 $|x^2 + 2x - 3| = k$ 가 양의 근 2개와 음의 근 2개를 갖도록 하는 상수 k 의 값의 범위는?

① $k \geq 3$

② $k > 4$

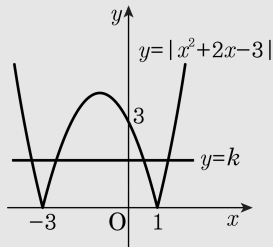
③ $3 \leq k < 4$

④ $0 < k < 3$

⑤ $0 < k < 4$

해설

방정식 $|x^2 + 2x - 3| = k$ 의 근은
 두 함수 $y = |x^2 + 2x - 3|$, $y = k$ 의
 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.
 따라서 그림에서 교점의 x 좌표가 양
 수 2개,
 음수 2개가 되려면 $0 < k < 3$



16. 이차함수 $y = -x^2 + 4ax + a - 2$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{33}{16}$

해설

$$\begin{aligned}y &= -x^2 + 4ax + a - 2 \\&= -(x^2 - 4ax) + a - 2 \\&= -(x - 2a)^2 + 4a^2 + a - 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{최댓값 } M &= 4a^2 + a - 2 \\&= 4\left(a^2 + \frac{1}{4}a\right) - 2 \\&= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{16} - 2 \\&= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{33}{16}\end{aligned}$$

따라서 M 의 최솟값은 $-\frac{33}{16}$ 이다.

17. 함수 $y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) - 6$ 이 $x = m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) - 6$ 에서

$x^2 + 4x + 5 = t$ 로 놓으면

$$y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) - 6$$

$$= -t^2 - 2t + 4 = -(t + 1)^2 + 5$$

그런데 $t = x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 \geq 1$ 이므로

$t = 1$, 즉 $x = -2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.

따라서, $m = -2$, $M = 1$

$$\therefore M + m = -1$$

18. x, y, z 가 실수일 때, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$ 의 최솟값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$$

$$= (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 - 1$$

이 때, x, y, z 가 실수이므로

$$(x + 1)^2 \geq 0, (y - 3)^2 \geq 0, (z - 4)^2 \geq 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25 \geq -1$$

따라서 $x = -1, y = 3, z = 4$ 일 때,

주어진 식의 최솟값은 -1이다.

19. 실수 x 에 대하여 함수 $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3}$ 의 함수값 중 가장 작은 정수를 m , 가장 큰 정수를 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 8

⑤ 9

해설

$$\frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3} = y \text{라 놓고,}$$

양변에 $x^2 + 2x + 3$ 을 곱하면

$$2x^2 - 4x + 1 = y(x^2 + 2x + 3)$$

$$(y - 2)x^2 + 2(y + 2)x + 3y - 1 = 0$$

x 가 실수이므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (y + 2)^2 - (y - 2)(3y - 1) \geq 0$$

$$2y^2 - 11y - 2 \leq 0$$

$$\therefore \frac{11 - \sqrt{137}}{4} \leq y \leq \frac{11 + \sqrt{137}}{4}$$

$$11 < \sqrt{137} < 12 \text{이므로}$$

$$-0. \times \times \times \leq y \leq 5. \times \times \times$$

따라서 $m = 0, M = 5$ 이므로 $m + M = 5$

20. 둘레의 길이가 28cm 인 직사각형에서 넓이를 최대가 되게 하려면 가로와 세로의 길이를 각각 얼마로 하면 되겠는가?

① 가로 6 cm, 세로 8 cm

② 가로 7 cm, 세로 7 cm

③ 가로 8 cm, 세로 9 cm

④ 가로 8 cm, 세로 8 cm

⑤ 가로 7 cm, 세로 9 cm

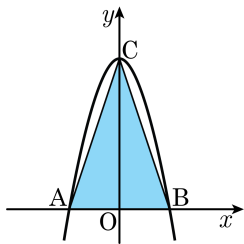
해설

가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 $(14 - x)$ cm, 넓이를 y cm² 라 하면

$$\begin{aligned}y &= x(14 - x) \\&= -x^2 + 14x \\&= -(x^2 - 14x + 49 - 49) \\&= -(x - 7)^2 + 49\end{aligned}$$

따라서 $x = 7$, 즉 가로 7 cm, 세로 7 cm 일 때 최댓값 49 cm² 를 가진다

21. $y = -x^2 + 9$ 의 그래프와 x 축과의 교점을 A, B 라고 하고, y 축과의 교점을 C 라고 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

점 C 는 꼭짓점이므로 $(0, 9)$, 점 A 와 B
는 $y = 0$ 일 때, x 좌표이므로

$$0 = -x^2 + 9$$

$$\therefore x = \pm 3$$

$$\therefore A = (-3, 0), B = (3, 0)$$

$$\triangle ABC \text{ 의 넓이} = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$$

22. 가로와 세로의 길이의 합이 20인 직사각형의 넓이를 y 라고 할 때, y 의 최댓값은?

① 90

② 92

③ 98

④ 100

⑤ 112

해설

가로를 x , 세로를 $20 - x$ 라 하자.

$$y = x(20 - x)$$

$$= -x^2 + 20x$$

$$= -(x^2 - 20x)$$

$$= -(x^2 - 20x + 100 - 100)$$

$$= -(x - 10)^2 + 100$$

따라서 y 의 최댓값은 100이다.

23. 둘레의 길이가 20 cm 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a(20 - 2a) = a(10 - a) = -a^2 + 10a \\ &= -(a^2 - 10a + 25) + 25 \\ &= -(a - 5)^2 + 25 \end{aligned}$$

$$a = 5, b = 25$$

따라서 $a + b = 30$ 이다.

24. 직각을 낀 두 변의 길이 x, y 의 합이 10이고 넓이가 8 이상인 직각삼각형이 있을 때, 다음 물음에 알맞게 답한 것을 고르면?

- (1) x 의 값의 범위를 구하여라.
 (2) 빗변의 길이를 z 라 할 때, z^2 을 x 에 관한 식으로 나타내어라.
 (3) z^2 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

- ① (1) $2 \leq x \leq 9$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 52
 ② (1) $1 \leq x \leq 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 51
 ③ (1) $2 \leq x \leq 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 50
 ④ (1) $2 \leq x \leq 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 52
 ⑤ (1) $2 \leq x \leq 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 50

해설

- (1) $x + y = 10$ 에서 $y = 10 - x$ 이고
 삼각형의 넓이가 8 이상이므로

$$\frac{1}{2}xy \geq 8, \quad \frac{1}{2}x(10 - x) \geq 8$$

$$x^2 - 10x + 16 \leq 0, \quad (x - 2)(x - 8) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 8$$
- (2) 피타고라스의 정리에 의해

$$z^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2$$

$$= 2x^2 - 20x + 100$$
- (3) $z^2 = 2x^2 - 20x + 100 = 2(x - 5)^2 + 50$
 이 때, $2 \leq x \leq 8$ 이므로 z^2 은 $x = 5$ 일 때
 최솟값 50, $x = 2$ 또는 $x = 8$ 일 때
 최댓값 68을 갖는다.

25. 지면으로부터 초속 30m 로 던져 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라고 하면 $h = 30t - 5t^2$ 인 관계가 성립한다. 이 물체가 가장 높이 올라갔을 때의 높이는?

① 60m

② 55m

③ 50m

④ 45m

⑤ 40m

해설

$$\begin{aligned}h &= 30t - 5t^2 \\&= -5(t^2 - 6t + 9) + 45 \\&= -5(t - 3)^2 + 45\end{aligned}$$