

1. 다음 이차방정식 중 근이 없는 것은?

① $x^2 - 2 = 0$

② $2x^2 - 6 = 0$

③ $x^2 = 4$

④ $x^2 + 5 = 0$

⑤ $2(x - 5)^2 = 12$

해설

④ $x^2 = -5$ 이므로 근이 없다.

2. 이차방정식 $3(x-4)^2 - 9 = 0$ 의 두 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$3(x-4)^2 - 9 = 0$$

$$(x-4)^2 = 3$$

$$x = 4 \pm \sqrt{3}$$

$$\therefore (4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3}) = 16 - 3 = 13$$

3. $(x+y)(x+y-6)-16=0$ 일 때, $x+y$ 의 값들의 합은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$x+y=A$ 라고 하면

$$A(A-6)-16=0$$

$$A^2-6A-16=0$$

$$(A-8)(A+2)=0$$

$\therefore x+y=8$ 또는 $x+y=-2$

따라서 $x+y$ 의 값들의 합은 $8+(-2)=6$ 이다.

4. $(x+y)(x+y-3)-28=0$ 일 때, $x+y$ 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x+y=7$

▷ 정답: $x+y=-4$

해설

$x+y=A$ 라고 하면

$$A(A-3)-28=0$$

$$A^2-3A-28=0$$

$$(A-7)(A+4)=0$$

$\therefore x+y=7$ 또는 $x+y=-4$

5. $x^2 - 3x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x - 3 + \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\begin{aligned} x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 9 - 2 + 3 = 10 \end{aligned}$$

6. $x^2 - 5x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x - 5 + \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x + \frac{1}{x} = 5$$

$$\begin{aligned} x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 25 - 2 + 5 = 28 \end{aligned}$$

7. 이차방정식 $x^2 + (m - 4)x + 40 = 0$ 의 두 근의 차가 3일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 큰 근을 α 라 하고 $\alpha < 0$ 이면 $m = 17$ 이다.
- ② 주어진 식을 만족하는 해는 8, 5 또는 -5, -8이다.
- ③ 주어진 식을 만족하는 모든 m 의 값의 합은 9이다.
- ④ 작은 근을 α 라 하고 $\alpha > 0$ 이면 $m < 0$ 이다.
- ⑤ 모든 m 의 값의 곱은 0보다 작다.

해설

두 근을 $\alpha, \alpha - 3$ 이라 하면

$$\alpha(\alpha - 3) = 40$$

$$\alpha = 8 \text{ 또는 } \alpha = -5$$

따라서 두 근은 8, 5 또는 -5, -8이다.

$$\text{두 근의 합은 } 13 = 4 - m, m = -9 \text{ 또는 } -13 = 4 - m, m = 17$$

따라서 주어진 식을 만족하는 모든 m 의 값의 합은 8이다.

8. 이차방정식 $x^2 - ax + b + 1 = 0$ 이 실근을 가질 때, b 의 최댓값을 M 이라 한다. M 의 범위가 $p \leq M \leq q$ 일 때, $p \times q$ 의 값을 구하여라.(단 a 의 범위는 $-1 \leq a \leq 2$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2 - ax + b + 1 = 0$ 이 실근을 가지므로

$$D = a^2 - 4(b + 1) \geq 0$$

$-1 \leq a \leq 2$ 이므로 $0 \leq a^2 \leq 4$

(1) $a^2 = 0$ 일 때, $-4(b + 1) \geq 0$, $b \leq -1$

(2) $a^2 = 4$ 일 때, $-4b \geq 0$, $b \leq 0$

$$\therefore -1 \leq M \leq 0$$

$$\therefore p \times q = 0$$

9. 어떤 무리수 x 가 있다. x 의 소수 부분을 y 라 할 때 x 의 제곱과 y 의 제곱의 합이 33이다.
무리수 x 의 값은? (단, $x > 0$)

① $x = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$

② $x = \frac{2 + \sqrt{41}}{5}$

③ $x = \frac{5 + \sqrt{37}}{3}$

④ $x = \frac{-2 + \sqrt{41}}{5}$

⑤ $x = \frac{3 + \sqrt{37}}{4}$

해설

$$x^2 + y^2 = 33, \quad 0 \leq y < 1$$

$$0 \leq y^2 = 33 - x^2 < 1, \quad \sqrt{32} < x \leq \sqrt{33}$$

따라서 x 의 정수 부분은 5 이고 $y = x - 5$

$$x^2 + (x - 5)^2 = 33$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{5 + \sqrt{41}}{2} \quad (\because x > 0)$$

10. 세 자리 자연수가 있다 각 자리의 수의 합은 9이고, 일의 자리의 수의 2배는 다른 두 자리의 수의 합과 같다.
또, 이 자연수의 각 자리수를 거꾸로 늘어놓아 얻은 자연수는 처음 자연수보다 99만큼 크다. 처음 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 243

해설

일의 자리, 십의 자리, 백의 자리의 수를 각각 p, q, r 라 하면,
 p, q 는 0 이상 10 미만의 정수이고
 r 은 1 이상 10 미만의 자연수이다.

$$\begin{cases} p + q + r = 9 & \cdots \textcircled{㉠} \\ 2p = q + r & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $p = 3$

$$(100r + 10q + 3) + 99 = 100 \times 3 + 10q + r$$

$$\therefore r = 2, q = 4$$

따라서 구하는 수는 243이다.

11. 이차방정식 $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{2}{3x}$ 의 양의 근을 α 라고 할 때, $3\alpha^2 - 3\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $11 + \sqrt{33}$

해설

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{2}{3x} \text{ 의 양변에 } 12x \text{ 를 곱하면}$$

$$3x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$3(x^2 - 2x + 1) = 8 + 3$$

$$3(x - 1)^2 = 11$$

$$\therefore x = 1 \pm \frac{\sqrt{33}}{3}$$

$$\alpha \text{ 는 양의 근이므로 } \alpha = 1 + \frac{\sqrt{33}}{3}$$

$$\therefore 3\alpha^2 - 3\alpha = 11 + \sqrt{33}$$

12. 이차방정식 $\frac{1}{12}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{2x}$ 의 양의 근을 α 라고 할 때, $\alpha^2 + 4\alpha$ 의 값은?

① $24 + 5\sqrt{21}$

② $26 + 6\sqrt{23}$

③ $28 + 7\sqrt{26}$

④ $32 + 8\sqrt{23}$

⑤ $34 + 8\sqrt{22}$

해설

$$\frac{1}{12}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{2x} \text{ 의 양변에 } 12x \text{ 를 곱하면}$$

$$x^2 - 4x - 18 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 18 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 22$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{22}$$

$$\alpha \text{ 는 양의 근이므로 } \alpha = 2 + \sqrt{22}$$

$$\therefore \alpha^2 + 4\alpha = 34 + 8\sqrt{22}$$

13. 두 수 x, y 가 모두 양의 정수일 때, $(x+y)^2 + 3x + y = 1996$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $y - 2x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$x + y \leq 44$ 이므로 ($\because 44^2 < 1996 < 45^2$)

1) $x + y = 44$ 이면,

$$\begin{aligned}(x+y)^2 + 3x + y &= (x+y)^2 + 3(x+y) - 2y \\ &= 1936 + 132 - 2y = 1996\end{aligned}$$

$\therefore y = 36, x = 8$

2) $x + y \leq 43$ 이면,

$$2y = (x+y)^2 + 3(x+y) - 1996 \leq 43^2 + 129 - 1996$$

$$2y \leq -18$$

즉, y 의 값이 음수이므로 문제의 조건에 적합하지 않다.

따라서 $y = 36, x = 8$ 이므로 $y - 3x = 20$ 이다.

14. $[x]$ 는 자연수 x 의 양의 약수의 개수를 나타낼 때, $[x]^2 - [x] - 2 = 0$ 을 만족시키는 자연수 x 중에서 20 이하인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$$[x]^2 - [x] - 2 = ([x] - 2)([x] + 1) = 0$$

$$\therefore [x] = 2 \text{ 또는 } [x] = -1$$

그런데, $[x] \neq -1$ 이므로 $[x] = 2$

양의 약수가 2개인 것은 소수이므로,

20 이하의 소수를 구하면

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 이다.

$\therefore$ 8 개

15. 배가 강을 따라 내려올 때는 거꾸로 거슬러 올라갈 때보다 시속 1km 더 빠르다. 강의 상류에서 하류까지 20km 를 왕복하는데 9시간 걸린다면 20km 를 내려오는 데 걸리는 시간은 몇 시간인지 구하여라.

▶ 답 : 시간

▷ 정답 : 4시간

해설

올라갈 때 속력을 x km/h 라 하면

내려올 때 속력은 $(x + 1)$ km/h

$\frac{20}{x} + \frac{20}{x+1} = 9$ 의 양변에 $x(x+1)$ 을 곱하면

$$20(x+1) + 20x = 9x(x+1)$$

$$40x + 20 = 9x^2 + 9x$$

$$9x^2 - 31x - 20 = 0$$

$$(x-4)(9x+5) = 0$$

$x > 0$ 이므로 $x = 4$ (km/h)

따라서 내려올 때 속력 : $x + 1 = 5$ km/h

$$\therefore \frac{20}{5} = 4 \text{ (시간)}$$

16. 지면에서 30m/s 의 속도로 쏘아올린 물체의 t 초 후의 높이를 $h\text{m}$ 라 하면 $h = 30t - 5t^2$ 이다. 이 물체가 지면으로부터 40m 높이에 올라간 때로부터 지면으로부터 10m 의 높이에 올 때까지 공중에 머무르는 시간은 몇 초인지 구하여라.

▶ 답 : 초

▷ 정답 : $1 + \sqrt{7}$ 초

해설

(1) 공의 높이가 40m 일 때이므로 $h = 40$ 을 대입하면

$$40 = 30t - 5t^2$$

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } 4$$

(2) 공의 높이가 10m 일 때이므로 $h = 10$ 을 대입하면

$$10 = 30t - 5t^2$$

$$t^2 - 6t + 2 = 0$$

$$\therefore t = 3 \pm \sqrt{7}$$

따라서 (1)에서 2 초 후에 물체가 지면으로부터 40m 높이의 위치를 올라갔다가

(2)에서 $3 + \sqrt{7}$ 초 후에 높이 10m 를 지나므로 물체가 지면으로부터 40m 높이에 올라간 때로부터 지면으로부터 10m 의 높이에 올 때까지 공중에 머무르는 시간은 $3 + \sqrt{7} - 2 = 1 + \sqrt{7}$ 초 동안이다.