1. 두 점 $\mathrm{A}(-1, 4), \mathrm{B}(6, 3)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 $\mathrm{P}(a, b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\mathrm{P}=(a, 0)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$ 에서
$(a+1)^2+4^2=(a-6)^2+9$, $a=2$
$\therefore\ \mathrm{P}=(2, 0)$
$a+b=2$

2. 좌표평면에서 세 점 $A(-1,\ 1)$, $B(2,\ 2)$, $C(6,\ 0)$에 대하여 $\triangle ABC$의 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표는?

① $(2, -1)$　② $(2, -2)$　③ $(2, -3)$

④ $(-2, 3)$　⑤ $(-2, -3)$

해설

$\overline{AB}$의 기울기 : $\dfrac{2-1}{2-(-1)}$,　중점은 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ ⇒ 수직이등분선

: $y=-3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{3}{2}$

$\overline{BC}$ 의 기울기는 $\dfrac{2-1}{6-2}=\dfrac{1}{4}$, 중심은 $(4,\ 1)$ ⇒ 수직이등분선: $y=2(x-4)+1$

두 직선의 교점을 구해보면 $x=2,\ y=-3$

∴ 세 변의 수직이등분선의 교점은 한 점에서 만나므로

∴ $(2, -3)$

해설

세 점을 연결한 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형의 외심이므로 각 점에 이르는 거리가 같다.

$O(x,\ y)$라고 하면

$\overline{AO}=\overline{CO}$에서 $(x+1)^2+(y-1)^2=(x-6)^2+y^2$, $7x-y=17 \cdots$ ㉠

$\overline{BO}=\overline{CO}$에서 $(x-2)^2+(y-2)^2=(x-6)^2+y^2$, $2x-y=7 \cdots$ ㉡

㉠ ㉡에서 교점의 좌표는 $(2,\ -3)$

3. 좌표평면 위의 두 점 $A(3,2)$, $B(5,4)$ 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은?

① 6　　② $\sqrt{37}$　　③ $\sqrt{38}$　　④ $\sqrt{39}$　　⑤ $\sqrt{40}$

해설

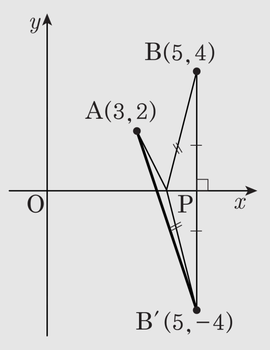
다음 그림과 같이 점 $B(5,\ 4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 $B'(5,-4)$ 라 하면

$\overline{PB}=\overline{PB'}$ 이므로

$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}\geq\overline{AB'}$

따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이고

$\overline{AB'}=\sqrt{(5-3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$



4. $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$와 $(4,0)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0,\ 1)$에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4,2)$에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

① $(1,\ 4)$ ② $\left(\frac{10}{7},\ 4\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3},\ 4\right)$
④ $\left(\frac{4}{3},\ 4\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0,1)$과 $(4,10)$을 연결하는 직선과 $y=4$와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore\ x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$를 지난다.

5. B(4, 2), C(0, 5) 인 △ABC의 무게중심의 좌표가 (1, 1)일 때, 꼭짓점 A의 좌표를 구하면?

① A(−2, −3) ② A(−2, −4) ③ A(−1, −4)
④ A(−1, −3) ⑤ A(−1, 4)

해설

A(x, y)라 하면

$\frac{x+4+0}{3}=1$, $\frac{y+2+5}{3}=1$

$\therefore x=-1,\ y=-4$

6. 두 점 (3, 2), (4, 5) 를 지나는 직선에 평행하고, x 절편이 3 인 직선의 방정식은?.

① $y = 3x - 9$ ② $y = -3x + 9$ ③ $y = -3x - 3$
④ $y = \frac{1}{3}x - 9$ ⑤ $y = 3x + 5$

해설

두 점 (3, 2), (4, 5) 를 지나는 직선의 방정식은

$y - 2 = \frac{5-2}{4-3}(x - 3)$

따라서 구하고자 하는 직선의 방정식은 기울기가 3 이고 x 절편이 3 이므로

$y = 3(x - 3)$ $\therefore$ $y = 3x - 9$

7. x축의 양의 방향과 $30°$를 이루고 x절편이 -1인 직선의 방정식은 $ax+by+1=0$이다. 이 때, ab의 값은?

① $-\sqrt{3}$ ② -1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 준 직선은 기울기가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이고,

점 $(-1,\ 0)$을 지나는 직선이다.

$\therefore\ y-0=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+1)$

$\therefore\ x-\sqrt{3}y+1=0$

$\therefore\ a=1,\ b=-\sqrt{3}$

$\therefore\ ab=-\sqrt{3}$

8. 두 점 $(a,\ 1)$, $(3,\ b)$ 가 x 절편이 4 이고, y 절편이 -2 인 직선 위에 있을 때, ab 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

x 절편이 4 이고,
y 절편이 -2 인 직선의 방정식은
$\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1 \cdots$ ㉠
점 $(a,\ 1)$ 이 ㉠ 위에 있으므로 $\frac{a}{4}-\frac{1}{2}=1$ 에서
$a=6$
점 $(3,\ b)$ 가 ㉠ 위에 있으므로
$\frac{3}{4}-\frac{b}{2}=1$ 에서 $b=-\frac{1}{2}$
$\therefore ab=-3$

9. 두 직선 $2x+ay+1=0$, $x+(a-3)y-4=0$이 평행할 때, 실수 a의 값은?

① -6 ② -3 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

두 직선이 평행하므로

$\frac{2}{1}=\frac{a}{a-3}\neq-\frac{1}{4}$

$\therefore 2a-6=a, a\neq\frac{3}{5}$에서 $a=6$

10. 두 직선 $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$ 의 교점과 점 $(2,-1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y=ax+b$ 이다. ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-28$

해설

$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$ 을 연립하면

교점 : $(1,3) \Rightarrow$ $(1,3), (2,-1)$ 을 지나는 직선

$y=\dfrac{-1-3}{2-1}(x-1)+3$

$\Rightarrow$ $y=-4x+7$

$\therefore a=-4,\ b=7$

$\therefore$ $ab=-28$

11. 두 직선 $3x-2y+1=0,\ 3x-2y-4=0$ 사이의 거리를 구하면?

① $\frac{\sqrt{13}}{13}$　② $\frac{3\sqrt{13}}{13}$　③ $\frac{5\sqrt{13}}{13}$
④ $\frac{6\sqrt{13}}{5}$　⑤ $\frac{7\sqrt{13}}{5}$

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점에서 나머지 직선까지의 거리를 구하면 된다.

$ex)3x-2y+1=0$의 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow\ \frac{\left|-2\times\frac{1}{2}-4\right|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{13}$

12. 직선 $3x-4y=0$ 과 평행이고, 점 $(2,\ 1)$ 에서의 거리가 1 인 직선의 y 절편은?(단, y 절편은 양수)

① $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ ② $\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$ ③ $(0,\ 1)$
④ $\left(0,\ \frac{4}{3}\right)$ ⑤ $(0,\ 3)$

해설

직선 $3x-4y=0$ 과 평행한 직선을
$3x-4y+k=0$ 이라 놓으면,
$\frac{|3\times 2-4\times 1+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$
$\therefore\ |2+k|=5,\ k=3\ (\because y$ 절편$>0)$
$\therefore$ 직선 $3x-4y+3=0$ 의 y 절편은$\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$

13. 점 A$(6,\ 2)$와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}$를 $1\ :\ 3$으로 내분하는 점의 자취는?

① $x-2y-8=0$ ② $x+2y-8=0$ ③ $x-2y+8=0$

④ $x+2y+8=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

P $(a,\ b)$라 하면 $a+2b-2=0\ \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AP}}$의 $1\ :\ 3$ 내분점을 Q $(x,\ y)$라 하면

$$\mathrm{Q}(x,\ y)=\left(\frac{a+18}{1+3},\frac{b+6}{1+3}\right)$$

$$x=\frac{a+18}{1+3}\ ,\ y=\frac{b+6}{1+3}$$

$a=4x-18$, $b=4y-6$

㉠에 대입하면,

$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$

14. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\qquad), k < (\qquad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - k$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

15. 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

16. 다음 두 원의 위치관계 중 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 모두 고른 것은?

㉠ $x^2+y^2=1,\quad (x-2)^2+(y-1)^2=4$
㉡ $(x+1)^2+y^2=2,\quad x^2+(y+3)^2=2$
㉢ $x^2+y^2=2,\quad (x+1)^2+(y-1)^2=8$
㉣ $x^2+y^2=4,\quad (x-3)^2+(y+4)^2=9$
㉤ $x^2+y^2-2x=0,\quad x^2+y^2-4x+2y+4=0$

① ㉠　　② ㉠, ㉤　　③ ㉡
④ ㉢, ㉣　　⑤ ㉡, ㉤

해설

서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는
$|r-r'|<d<|r+r'|$ 이어야 한다.
㉡ 만나지 않는다.
㉢ 내접한다.
㉣ 외접한다.

17. $x^2+y^2-4x=0,\ x^2+y^2-6x-2y+8=0$ 의 교점을 지나는 원의 반지름의 최솟값은?

① $\sqrt{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설

주어진 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$(x^2+y^2-4x)+k(x^2+y^2-6x-2y+8)=0$
이 중에서 반지름이 최소인 경우는 공통현을 지름으로 하는 원이다.
결국 구하는 값은 공통현의 길이의 절반을 구하면 된다.
공통현의 방정식은 $x+y-4=0$,
$x^2+y^2-4x=0$ 의 중심은 $(2,\ 0)$ 반지름은 2 이고,
중심에서 공통현까지의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로
공통현의 길이의 절반은 $\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$,
구하는 값은 $\sqrt{2}$ 이다.

18. 두 원

A : $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$,

B : $x^2 + y^2 - 2ax + 2y - 6 = 0$

에서 원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

원 B 가 원 A 의 둘레를 이등분하므로
두 원의 공통현이
원 A 의 중심을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
$(1 + a)x - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠
한편, $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$
$(x + 1)^2 + y^2 = 5$ 이므로
㉠이 점 $(-1, 0)$ 을 지나야한다.
$-1 - a + 1 = 0$
$\therefore\ a = 0$

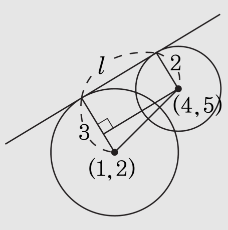
19. 두 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=9,\ (x-4)^2+(y-5)^2=4$ 의 공통접선의 길이는?

① 4　　② $\sqrt{17}$　　③ $3\sqrt{2}$　　④ $\sqrt{19}$　　⑤ $2\sqrt{5}$

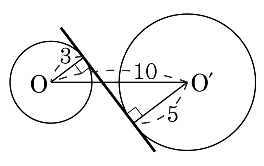
해설

두 원의 중심거리와 반지름의 차를 이용하여 구한다.

$\therefore\ l = \sqrt{(4-1)^2+(5-2)^2-1^2} = \sqrt{17}$



20. 다음 그림의 두 원 O와 O′ 에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3+5)^2} = 6$

21. 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 위의 점 P에서 직선 $3x-4y-24=0$ 까지의 거리의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2+y^2-8y-9=0 \Leftrightarrow x^2+(y-4)^2=5^2$ 이므로
원의 중심의 좌표는 $(0,\ 4)$이고, 반지름의 길이는 5이다.
그런데 중심 $(0,\ 4)$ 에서 직선 $3x-4y-24=0$
까지의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 4-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{40}{5}=8$$

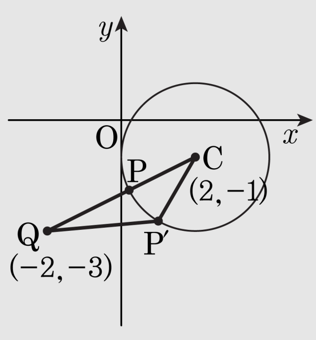
따라서 구하는 최소 거리는
$d-$ (원의 반지름의 길이)$=8-5=3$

22. 방정식 $x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$이 나타내는 원 중 최대인 원을 C라 할 때, C 위의 점 P에서 점 $Q(-2,\ -3)$ 까지의 거리의 최솟값을 구하면?

① $2(\sqrt{2}-1)$ ② $2(\sqrt{3}-1)$ ③ $2(\sqrt{5}-1)$
④ $2(\sqrt{6}-1)$ ⑤ $2(\sqrt{7}-1)$

해설

$x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$ 에서
$\{x+(m-1)\}^2+(y-m)^2=-m^2-2m+3$
반지름의 길이를 r 라고 하면
$r^2=-m^2-2m+3=-(m+1)^2+4$
즉, $m=-1$ 일 때, $r=2$ 로 최대이다.



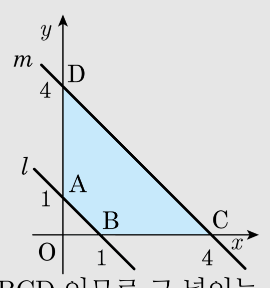
한편, 원 C의 중심을 O라 할 때 그림에서와 같이
$\overline{CQ}$와 원 C의 교점을 P라 하면,
원, C 위의 임의의 점 P′에 대하여
$\overline{CP}=\overline{CP'}=2$이고
$\overline{CQ}=\overline{CP}+\overline{PQ}\leq\overline{CP'}+\overline{P'Q}$이므로
$\overline{PQ}\leq\overline{P'Q}$
따라서, P가 $\overline{CQ}$와 원 C의 교점일 때,
$\overline{PQ}$의 길이가 최소이다.
중심 $(2,-1)$ 과 점 $Q(-2,-3)$ 까지의 거리는 $\sqrt{(2+2)^2+(-1+3)^2}=2\sqrt{5}$
따라서, $\overline{PQ}$의 최솟값은 $2\sqrt{5}-2=2(\sqrt{5}-1)$

23. 직선 $l : x+y=1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 직선을 m 이라고 할 때, 두 직선 l, m 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

해설

직선 $l : x+y=1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한
직선의 방정식은 $(x-2)+(y-1)=1$
$\therefore m : x+y=4$
따라서, 두 직선 l, m 과 x 축 및 y 축으로
둘러싸인 도형은 다음 그림의 사각형 ABCD 이므로 그 넓이는
삼각형 OCD 의 넓이에서
삼각형 OBA 의 넓이를 뺀 것과 같다.



$$\therefore \square ABCD = \triangle OCD - \triangle OBA$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$
$$= \frac{15}{2}$$

24. 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{PQR}$ 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

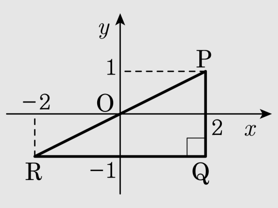
해설

점 $\mathrm{P}(2,1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한

점 Q 는 $\mathrm{Q}(2,-1)$

또, 점 $\mathrm{P}(2,1)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 R 는 $\mathrm{R}(-2,-1)$

따라서, 다음 그림에서 세 점 $\mathrm{P}(2,1)$, $\mathrm{Q}(2,-1)$, $\mathrm{R}(-2,-1)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{PQR}$ 의 넓이는



$\frac{1}{2}\times4\times2=4$

25. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$과 원점을 중심으로 하는 어떤 원이 직선 $y = ax + b$에 대하여 대칭일 때, ab의 값은?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$와 다른 한 원은 서로 대칭이므로 크기가 같다.
따라서 다른 원의 방정식은 $x^2 + y^2 = 5$이다.
원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$ 와 $x^2 + y^2 = 5$ 이 직선 $y = ax + b$ $\cdots$ ①에 대하여 대칭이므로
직선 ①은 점 $(-2, 1)$ 와 점 $(0, 0)$을 수직이등분한다.
따라서 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$은 직선 ①위에 있고 기울기의 곱은 -1이다.

$\frac{1}{2} = -a + b$, $\frac{1}{-2} \times a = -1$

$\therefore\ a = 2, b = \frac{5}{2}$

따라서 $a \times b = 2 \times \frac{5}{2} = 5$