

1. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 한다. $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 을 두 근으로 하고, x^2 의 계수가 1인 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하시오.

① -1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과계수와의 관계로부터

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1$$

2와 -1을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 - (2 - 1)x + 2 \cdot (-1) = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + ax + b = 0$$

$$\therefore a = -1, b = -2$$

2. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은? (단, $\alpha\beta \neq 0$)

① $ax^2 + bx + c = 0$

② $cx^2 + bx + a = 0$

③ $cx^2 - bx + a = 0$

④ $\frac{x^2}{a} + \frac{x}{b} + \frac{1}{c} = 0$

⑤ $abx^2 + bcx + ca = 0$

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 에서

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c},$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{a}{c}$$

$$\therefore x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0,$$

$$cx^2 + bx + a = 0$$

3. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\beta-1}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + ax + b = 0$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① 3

② 5

③ 0

④ -3

⑤ -5

해설

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 2 = 7$$

$$\begin{aligned} a &= -\left(\frac{\beta}{\alpha-1} + \frac{\alpha}{\beta-1}\right) \\ &= -\frac{\beta(\beta-1) + \alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)} \\ &= -\frac{(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} \\ &= -\frac{7-3}{1-3+1} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha-1) \cdot (\beta-1)} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} \\ &= \frac{1}{1-3+1} = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore a + b = 4 - 1 = 3$$

4. 이차방정식 $x^2 - x + 5 = 0$ 의 두근을 α, β 라 할때, $\alpha + 1$ 과 $\beta + 1$ 을 두근으로 하는 이차방정식을 구하면? (단, 최고차항의 계수는 1이다.)

① $x^2 + 3x - 7 = 0$

② $x^2 - 3x - 7 = 0$

③ $x^2 + 7x - 3 = 0$

④ $x^2 - 7x + 3 = 0$

⑤ $x^2 - 3x + 7 = 0$

해설

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 5$$

$$\text{두근의 합} : (\alpha + 1) + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 2 = 3$$

$$\begin{aligned}\text{두근의 곱} : (\alpha + 1)(\beta + 1) &= \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 \\ &= 5 + 1 + 1 = 7\end{aligned}$$

$$\therefore x^2 - 3x + 7 = 0$$

5. 서현이와 주현이가 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 을 함께 풀었다. 그런데 서현이는 a 를 잘못 보고 풀어서 두 근 1, 3을 얻었고, 주현이는 b 를 잘못 보고 풀어서 두 근 -1, -4를 얻었다. 이 때, 처음 이차방정식은?

① $x^2 - 5x + 3 = 0$

② $x^2 + 5x + 3 = 0$

③ $x^2 + 5x + 13 = 0$

④ $x^2 + 5x - 13 = 0$

⑤ $x^2 + 5x + 15 = 0$

해설

서현이가 잘못 본 일차항의 계수 a 를 a' ,
주현이가 잘못 본 상수항 b 를 b' 이라 하자.

$x^2 + a'x + b = 0$ 의 두 근이 1, 3이므로

$$b = 1 \times 3 = 3$$

$x^2 + ax + b' = 0$ 의 두 근이 -1, -4이므로

$$-a = (-1) + (-4) = -5$$

$$\therefore a = 5$$

따라서 처음의 이차방정식은 $x^2 + 5x + 3 = 0$

6. 이차방정식 $x^2 - 14kx + 96k = 0$ 의 두 근의 비가 3 : 4일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 2$

해설

두 근을 3α , 4α 라고 하면
근과 계수의 관계에 의하여

$$3\alpha + 4\alpha = 14k \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$3\alpha \cdot 4\alpha = 96k \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } 7\alpha = 14k \therefore \alpha = 2k \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } 12\alpha^2 = 96k \therefore \alpha^2 = 8k \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢} \text{을 } \textcircled{㉣} \text{에 대입하면 } 4k^2 = 8k, 4k(k - 2) = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 2$$

따라서 양수 k 의 값은 $k = 2$ 이다.

7. 이차방정식 $9x^2 - 2kx + k - 5 = 0$ 의 두 근의 차가 2일 때, 실수 k 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

작은 근을 α 라 하면, 큰 근은 $\alpha + 2$ 이므로

$$\alpha + \alpha + 2 = \frac{2k}{9} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha(\alpha + 2) = \frac{k - 5}{9} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \alpha = \frac{k}{9} - 1,$$

이것을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$k^2 - 9k - 36 = 0, (k - 12)(k + 3) = 0$$

$$\therefore k = 12, -3$$

해설

두 근의 차 공식을 이용하면,

$$\frac{\sqrt{(2k)^2 - 4 \cdot 9(k - 5)}}{|9|} = 2 \text{에서}$$

$$\sqrt{4k^2 - 36(k - 5)} = 18$$

양변을 제곱하여 정리하면,

$$k^2 - 9k - 36 = 0 \therefore k = 12, -3$$

8. 이차방정식 $x^2 - 2kx + 9 = 0$ 의 두 근의 비가 $1 : 3$ 이 되도록 상수 k 의 값을 구하면?

① $\pm 2\sqrt{2}$

② $\pm 2\sqrt{3}$

③ $\pm 2\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{6}$

⑤ ± 2

해설

한 근을 α 라 하면 다른 한 근은 3α

$$\therefore \text{두 근의 곱은 } 3\alpha^2 = 9 \quad \therefore \alpha = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{두 근의 합은 } \alpha + 3\alpha = \pm 4\sqrt{3} = 2k$$

$$\therefore k = \pm 2\sqrt{3}$$

9. 조건 $x^2 - 2kx + k^2 + 2k + 3 = 0$ 의 두 근의 차가 2 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 근을 α , $\alpha + 2$ 라 하면
근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + 2 = 2k & \dots\dots\textcircled{\text{㉠}} \\ \alpha(\alpha + 2) = k^2 + 2k + 3 & \dots\dots\textcircled{\text{㉡}} \end{cases}$$

㉠에서 $\alpha = k - 1$ 을 ㉡에 대입하면,

$$(k - 1)(k + 1) = k^2 + 2k + 3$$

$$\therefore k = -2$$

10. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + 3 = 0$ 의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{4}{5}$

⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$$-a = 2 + 3, a = -5$$

$$b = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\therefore -5x^2 + 6x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$\text{두 근의 합은 } \frac{6}{5}$$

11. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 0

해설

다른 한 근은 복소수의 켤레근인 $1 + i$ 이므로

두 근의 합: $(1 + i) + (1 - i) = -a \quad \therefore a = -2$

두 근의 곱: $(1 + i)(1 - i) = b \quad \therefore b = 2$

$\therefore a + b = -2 + 2 = 0$

12. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3

② 0

③ 2

④ 4

⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$

근과 계수와의 관계에 의해

$$a = 4, b = 1$$

$$\therefore ab = 4$$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입

$$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$$

계수가 유리수이므로

$$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$$

$$a = 4, b = 1$$

$$\therefore ab = 4$$

13. 이차방정식 $2x^2 - 6x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $2x^2 - 6x + 1 = 0$

② $x^2 - 6x + 1 = 0$

③ $x^2 - 7x + 3 = 0$

④ $2x^2 + 6x - 1 = 0$

⑤ $2x^2 - 7x + 3 = 0$

해설

근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = \frac{6}{2} = 3, \alpha\beta = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

3 과 $\frac{1}{2}$ 을 이용한 근과 계수의 관계를 구해보면

$$3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}, 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\therefore 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

14. $x^2 - 9x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2 + ax + b = 0$ 이다. 이 때, 상수 $a + b$ 의 값은?

① 14

② 15

③ 16

④ 17

⑤ 18

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 9, \quad \alpha\beta = 3$$

9, 3을 근으로 하는 x^2 의 계수가 1 이차방정식은

$$(x - 9)(x - 3) = 0$$

$$x^2 - 12x + 27 = 0 \quad \therefore a = -12, \quad b = 27$$

15. $x^2 + x + 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 일 때, $\alpha^2 + 1, \beta^2 + 1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식을 구하면?

① $x^2 - 2x + 2 = 0$

② $x^2 + 2x + 2 = 0$

③ $x^2 + 2x + 3 = 0$

④ $x^2 - x + 2 = 0$

⑤ $x^2 + x + 2 = 0$

해설

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 2 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$\alpha^2 + 1, \beta^2 + 1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 - (\alpha^2 + 1 + \beta^2 + 1)x + (\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\text{그런데, } \textcircled{㉠} \text{으로부터 } \alpha^2 + 1 + \beta^2 + 1 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 2 = -1$$

$$(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = (\alpha\beta)^2 + (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 1 = 2$$

$$\text{이것을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } x^2 + x + 2 = 0$$

16. 두 수 $1 + 2i$, $1 - 2i$ 를 근으로 하고, x^2 의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2 - 2x - 5 = 0$

② $x^2 + 2x + 5 = 0$

③ $x^2 + 5x + 2 = 0$

④ $x^2 - 2x + 5 = 0$

⑤ $x^2 - 5x + 2 = 0$

해설

$$\alpha + \beta = (1 + 2i) + (1 - 2i) = 2$$

$$\alpha\beta = (1 + 2i)(1 - 2i) = 5$$

$$\therefore x^2 - 2x + 5 = 0$$

17. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2 - 6x + 4 = 0$

② $x^2 - 3x + 4 = 0$

③ $x^2 + 6x + 5 = 0$

④ $x^2 + 4x + 5 = 0$

⑤ $x^2 - 4x + 5 = 0$

해설

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$

두 근의 합 : $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$$= \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 3 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 3 + 3 = 6$$

두 근의 곱 : $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$$= \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2 = 4$$

$\therefore$ 방정식은 $x^2 - 6x + 4 = 0$

18. $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근이 α, β 이다. $\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = 2$ 일 때 $p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

두 근의 합이 3이므로 $p = 3$,
두 근의 곱이 2이므로 $q = 2$ 이다.
따라서 $p^2 + q^2 = 9 + 4 = 13$

19. 이차방정식 $x^2 + 7x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 일 때, $(\alpha^2 + \beta^2) + 5(\alpha + \beta)$ 의 값을 구여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

이차방정식 $x^2 + 7x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로,
근과 계수와의 관계에 의해서

$$\alpha + \beta = -7, \alpha\beta = 1$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-7)^2 - 2 \cdot 1 = 47$$

$$\therefore 47 + 5 \cdot (-7) = 47 - 35 = 12$$

20. 이차방정식 $x^2 - 10x + k = 0$ 의 두 근의 비가 2 : 3이 되도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

주어진 방정식의 한 근을 2α 라 하면
다른 한 근은 3α 가 되므로

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\alpha = 10 & \dots\dots\dots ① \\ 2\alpha \times 3\alpha = k & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

①, ②를 풀면

$$\alpha = 2, k = 6 \times 2^2 = 24$$