1. 함수 $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=x^2+ax+3$ 일 때, 모든 실수에 대하여 $(f\circ g)(x)\geq 0$이 되는 실수 a의 범위는? (단, $f\circ g$는 g와 f의 합성함수이다.)

① $a\leq -3, a\geq 2$　② $-1\leq a\leq 1$　③ $a\leq -2, a>3$
④ $-2\leq a\leq 2$　⑤ $-1\leq a\leq 3$

해설

$g(x)=t$라 두면,
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t^2-t-2\geq 0$에서
$t\leq -1,\ t\geq 2$에서
(i) $t\leq -1$
$x^2+ax+3\leq -1$
$x^2+ax+4\leq 0$ (부적절)
(ii) $t\geq 2$
$x^2+ax+3\geq 2$
$x^2+ax+1\geq 0$에서
$D=a^2-4\leq 0$
$\therefore\ -2\leq a\leq 2$

2. $y = \dfrac{2}{x-1} - 2$의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

① $y = \dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축으로 -1, y축으로 -2만큼 평행이동한 그래프이다.

② 치역은 $R - \{-2\}$ 이다.

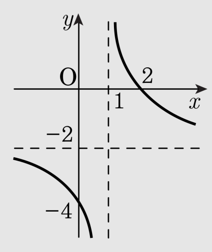
③ 제 2사분면을 지나지 않는다.

④ 점근선은 $x = 1$, $y = -2$ 이다.

⑤ 정의역은 $R - \{1\}$ 이다.

해설

$y = \dfrac{2}{x-1} - 2$의 그래프는 $y = \dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 그래프로 다음 그림과 같다.



따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

3. 분수함수 $f(x)=\dfrac{a}{x}$ 의 그래프가 점 $(a-1,\ 2a)$ 를 지날 때, $1\le x\le 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은? (단, a 는 상수)

① $\dfrac{1}{2}$　② 1　③ $\dfrac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\dfrac{5}{2}$

해설

분수함수 $f(x)=\dfrac{a}{x}$ 의 그래프가 점 $(a-1,\ 2a)$ 를 지나므로

$2a=\dfrac{a}{a-1}$, $2a^2-3a=0$, $a(2a-3)=0$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}(\because a\neq 0)$

따라서 $f(x)=\dfrac{3}{2x}$ 이므로 $1\le x\le 3$ 에서

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값 $f(1)=\dfrac{3}{2}$ 을 가진다.

4. $x = \dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

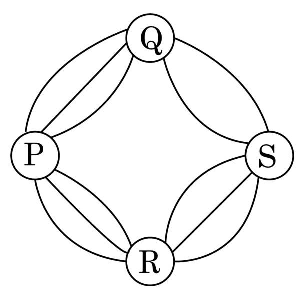
$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$y = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$x + y = 2\sqrt{3}$, $xy = 1$

$x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy = 12 - 1 = 11$

5. 네 지점 P, Q, R, S 를 연결하는길이 아래 그림과 같다. 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않고 P 에서 S 로가는 길을 택하는 방법은 몇가지인지 구하여라.



▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 15 가지

해설

(1) $P \to Q \to S$ 인 경우 $3 \times 2 = 6$ (가지)
(2) $P \to R \to S$ 인 경우 $3 \times 3 = 9$ (가지)
이때, (1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로, 구하는 방법의 수는 $6 + 9 = 15$ (가지) 이다.

6. 10 원짜리 동전 5 개, 100 원짜리 동전 4 개, 1000 원짜리 지폐 1 장이 있을 때, 이들을 전부 또는 일부 사용하여 지불할 수 있는 금액은 몇 가지인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 59 가지

해설

10 원짜리 동전을 0, 1, 2, 3, 4, 5 개 사용할 수 있고 이들 각각에 100 원짜리 동전을 0, 1, 2, 3, 4 개 사용할 수 있고 여기에 1000 원짜리 지폐 0, 1 개를 각각 사용할 수 있다.
그런데 10 원짜리 동전 0 개, 100 원짜리 동전 0 개, 1000 원자리 지폐 0 개를 동시에 사용하는 것은 의미가 없으므로 구하는 경우의 수는
$6 \times 5 \times 2 - 1 = 59$ (가지)

7. $1, 2, 3, 4$ 를 일렬로 배열할 때, i 번째 오는 숫자를 a_i ($1 \le i \le 4$)라고 하면 $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)(a_4 - 4) \ne 0$ 인 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 9 가지

해설

가능한 답을 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 으로 나타내어 보면 다음과 같다.

$(2, 1, 4, 3)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(2, 4, 1, 3)$,
$(3, 1, 4, 2)$, $(3, 4, 1, 2)$, $(3, 4, 2, 1)$,
$(4, 1, 2, 3)$, $(4, 3, 1, 2)$, $(4, 3, 2, 1)$

$\therefore$ 9 가지

8. 집합 $X = \{-1, 1\}$을 정의역으로 하고, 실수 전체의 집합 R를 공역으로 하는 함수
$f(x) = |x|$, $g(x) = ax - 2$에 대하여 $f(-1) = g(-1)$일 때, $a + g(1)$의 값은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$f(-1) = g(-1)$에서 $|-1| = -a - 2$, $1 = -a - 2$
$\therefore a = -3$
이때, $g(1) = -3 - 2 = -5$
$\therefore a + g(1) = -3 - 5 = -8$

9. 역함수가 존재하는 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 4x + 1$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(9)$ 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$(g \cdot f)^{-1}(x) = (f^{-1} \cdot g^{-1})(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(9) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ g)(9) \\ &= (\mathrm{I} \circ \mathrm{I})(9) \\ &= 9\end{aligned}$$

10. m이 유리수일 때, $\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3}$가 유리수가 되도록 하는 m의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3} = \frac{(m-5+2\sqrt{2})(-3-\sqrt{2}m)}{(-3+\sqrt{2}m)(-3-\sqrt{2}m)}$$

$$= \frac{-7m+15}{9-2m^2} - \frac{m^2-5m+6}{9-2m^2}\cdot\sqrt{2}$$

가 유리수이므로

$$\frac{m^2-5m+6}{9-2m^2} = 0$$

$\therefore\ m^2-5m+6=0 \quad \therefore\ m=2,\ 3$

11. 함수 $y = \dfrac{ax+8}{x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = 6$, $y = -1$ 일 때, 함수 $y = \sqrt{bx-a}$ 의 정의역에 속하는 정수의 최댓값은? (단, a, b 는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = \dfrac{ax+8}{x+b} = \dfrac{8-ab}{x+b} + a$ 이고

점근선의 방정식이 $x = -b = 6$, $y = a = -1$ 이므로 $a = -1$, $b = -6$

함수 $y = \sqrt{-6x+1}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \leq \dfrac{1}{6}\right\}$ 이므로 구하는 정수의 최댓값은 0 이다.

12. 함수 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, 좌표평면 위에서 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표를 구하면?

① $(-1,\ -1)$ ② $(0,\ 0)$ ③ $(1,\ 1)$
④ $(2,\ 2)$ ⑤ $(3,\ 3)$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 서로 역함수이므로
두 함수의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 와
직선 $y = x$ 의 교점과 일치한다.
따라서 $\sqrt{2x+3} = x$ 의 양변을 제곱하여
정리하면 $x^2 - 2x - 3 = 0,\ (x+1)(x-3) = 0$
$\therefore\ x = -1,\ 3$
$x \geq 0$ 이므로 $x = 3$
즉, 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이다.

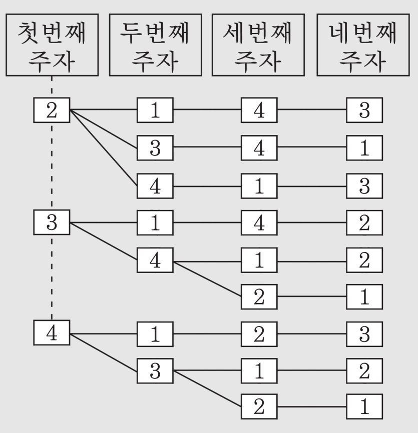
13. 등 번호가 ①, ②, ③, ④ 인 네 명이 이어달리기 순서를 결정하려고 한다. 네 명 모두 자신의 등 번호와 달리는 순서의 번호가 서로 같지 않도록 순서를 결정하는 방법의 수는?

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 9 개

해설

첫 번째 주자로 등번호가 ① 인 사람이 올 수 없고, 두 번째, 세 번째, 네 번째 주자로 각각 등번호가 ②, ③, ④ 인 사람이 올 수 없다. 이와 같은 조건에 맞는 수형도를 생각해 보면 다음과 같다.



따라서, 구하는 방법의 수는 9 (가지) 이다.

14. 다음 그림과 같은 6 개의 정사각형으로 이루어진 직사각형이 있다. 이때, 적어도 두 개 이상의 정사각형을 색칠하는 서로 다른 방법의 수를 구하여라. (단, 직사각형은 고정되어 있다.)

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 57 가지

해설

전체 경우의 수는 $2^6 = 64$ (가지) 이다.
여사건을 생각하면 모두 칠하지 않거나 한 개의 정사각형만 칠하는 경우이므로 $1 + 6 = 7$
따라서 구하는 경우의 수는 $64 - 7 = 57$

15. 키가 모두 다른 남학생 세 명과 여학생 세 명이 일렬로 놓인 의자에 앉으려고 한다. 남학생끼리는 키가 작은 학생이 큰 학생보다 왼쪽에 앉아야 할 때, 방법의 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

남학생 세 명이 앉는 순서는 정해져 있다.
6 명이 앉는 방법의 수를 남학생 3 명이 자리를 바꿔 앉는 방법의 수로 나누면

$\frac{6!}{3!} = 120$

16. 카드 4장이 있는데, 앞쪽과 뒤쪽에 각각 0과 1, 2와 3, 4와 5, 6과 7 이라는 숫자가 하나씩 적혀 있다. 이들 카드 4장을 한 줄로 늘어놓아서 만들 수 있는 네 자리 정수의 개수는?

① 250　　② 270　　③ 272　　④ 336　　⑤ 384

해설

구하는 네자리 정수를 빈 칸으로 하고 카드를 뽑아다 채운다면, 천의 자리는 4장의 카드 앞, 뒷면 8가지 가운데 0을 뺀 7가지이고, 만의 자리는 카드 세 장의 앞, 뒷면이 올 수 있으므로 6가지

□	□	□	□
↑	↑	↑	↑
7	6	4	2
가	가	가	가
지	지	지	지

이와 같은 방법으로 하면 총 경우의 수는
$7 \times 6 \times 4 \times 2 = 336$ (가지)

17. 여섯 개의 알파벳 I, L, O, V, E, U 를 일렬로 배열할 때, 적어도 네 개의 알파벳 L, O, V, E가 이웃하여 $LOVE$ 로 나타나지 <u>않는</u> 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 714 가지

해설

6 개의 알파벳을 일렬로 배열하는 방법의 수는 $6!$ 이고 L, O, V, E 을 묶어 일렬로 나열하는 방법의 수,
즉 $LOVE$ 가 나타나는 경우의 수는 $3!$ 이므로
구하는 경우의 수는 $6! - 3! = 720 - 6 = 714$

18. 임의의 자연수에 대하여 함수 f 가 다음 두 조건을 만족할 때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2008)$ 의 값은?

(가) $f(1)=1,\ f(2)=2$ (나) $f(x+1)=f(x+2)+f(x)$

① 1　　② 3　　③ 4　　④ 2007　　⑤ 2008

해설

(나)에서 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$ 이므로

$f(3)=f(2)-f(1)=2-1=1$

$f(4)=f(3)-f(2)=1-2=-1$

$f(5)=f(4)-f(3)=-1-1=-2$

$f(6)=f(5)-f(4)=-2-(-1)=-1$

$f(7)=f(6)-f(5)=-1-(-2)=1$

$f(8)=f(7)-f(6)=1-(-1)=2$

$\vdots$

따라서 $f(1)=f(7),\ f(2)=f(8),\ f(3)=f(9),\ \cdots,$

$f(x)=f(x+6)$ 이고

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=0$ 이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2008)$

$=334\{f(1)+f(2)+\cdots+f(5)+f(6)\}$

$\quad+f(2005)+f(2006)+f(2007)+f(2008)$

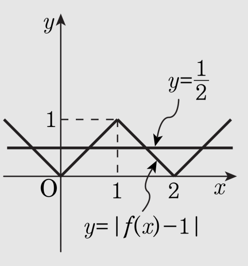
$=334\cdot 0+1+2+1+(-1)=3$

19. 함수 $f(x)=|x-1|$ 에 대하여 $(f\circ f)(x)=\frac{1}{2}$ 의 실근의 개수를 구하면?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

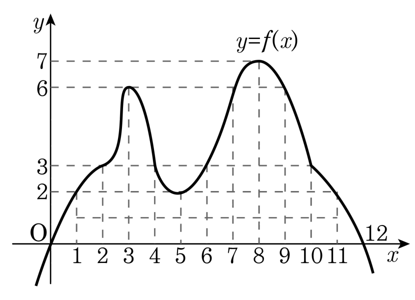
해설

$(f\circ f)(x)=|f(x)-1|$ 이므로
$y=|f(x)-1|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|f(x)-1|$ 의 그래프와
직선 $y=\frac{1}{2}$ 이 4 개의 점에서
만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 4 개이다.

20. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $g(x)$ 가 $g(x) = (f \circ f)(x+2)$ 일 때, $g(x) = 6$ 을 만족시키는 실수 x 의 개수는 몇 개인가? (단, $x < 0$ 또는 $x > 12$ 일 때, $f(x) < 0$ 이다.)



① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

$g(x) = 6$ 에서 $(f \circ f)(x+2) = 6$ 이므로,
$f(f(x+2)) = 6$
$x + 2 = t$ 로 놓으면 $f(f(t)) = 6$
$\therefore f(t) = 3$ 또는 $f(t) = 7$ 또는 $f(t) = 9$
그런데 $f(t) \leq 7$ 이므로
$f(t) = 3$ 또는 $f(t) = 7$
(i) $f(t) = 3$ 일 때,
  $t = 2$ 또는 $t = 4$ 또는 $t = 6$ 또는 $t = 10$
  $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = 8$
(ii) $f(t) = 7$ 일 때, $t = 8$
  $\therefore x = 6$
(i), (ii) 에서
실수 x 의 값은 0 , 2 , 4 , 6 , 8 의 5 개이다.

21. 양의 실수 전체의 집합 X 에서 X 로의 일대일대응인 두 함수 $f,\ g$ 에 대하여 $f^{-1}(x) = x^2,\quad (f \circ g^{-1})(x^2) = x$ 일 때, $(f \circ g)(20)$ 의 값은? (단, f^{-1} , g^{-1} 는 각각 $f,\ g$ 의 역함수)

① $2\sqrt{5}$　② $4\sqrt{10}$　③ 40　④ 200　⑤ 400

해설

$f^{-1}(x) = x^2$ 에서 $f(x^2) = x \cdots$ ㉠
$(f \circ g^{-1})(x^2) = x$ 에서 $f(g^{-1}(x^2)) = x \cdots$ ㉡
f 는 일대일 대응이므로 ㉠, ㉡ 에서
$g^{-1}(x^2) = x^2$
$\therefore g(x^2) = x^2$
따라서 $g(20) = 20,\ f(20) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ 이므로
$(f \circ g)(20) = f(g(20)) = f(20) = 2\sqrt{5}$

22. a, b, c가 실수일 때, $a+b=4ab$, $b+c=10bc$, $c+a=6ca$이 성립한다. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$a+b=4ab$에서 $\frac{a+b}{ab}=4$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$

같은 방법으로 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=10$, $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=6$

$\therefore 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=20$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=10$

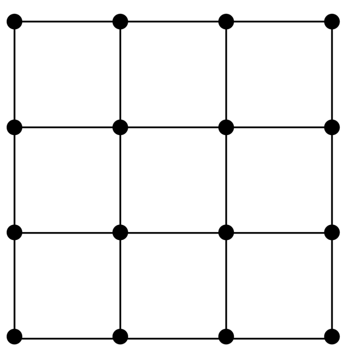
23. 세 상자 P, Q, R에 들어 있는 구슬의 개수의 비가 처음에는 2 : 3 : 4였다. 전체 구슬의 개수는 변함없이 각 상자에서 구슬을 꺼내 다른 상자에 넣는 시행을 반복한 후, P, Q, R에 들어 있는 구슬의 개수의 비를 구했더니 3 : 2 : 5가 되었다. P상자에 들어 있는 구슬의 개수가 처음보다 7개가 늘었다면 R상자에 들어있는 구슬의 개수의 변화는?

① 처음보다 7개 줄었다.
② 처음보다 6개 줄었다.
③ 개수의 변화가 없다.
④ 처음보다 5개 늘었다.
⑤ 처음보다 8개 늘었다.

해설

전체 구슬의 개수를 x라 하면 조건에서
P상자의 구슬이 7개 늘었으므로
$\frac{3x}{10} - \frac{2x}{9} = 7$
$\therefore\ x = 90$ (개)
따라서 R 상자의 구슬의 개수는 시행 전
: $4 \times \frac{90}{9} = 40$ (개)
시행 후 : $5 \times \frac{90}{10} = 45$ (개)이므로
시행 후에 처음보다 5개가 늘었다.

24. 아래 그림과 같이 정사각형 모양으로 16 개의 점이 있다. 이 중 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 몇 개인가?

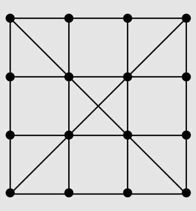


① 342 ② 428 ③ 489 ④ 516 ⑤ 642

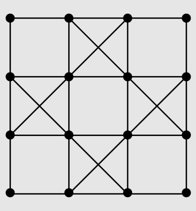
해설

전체 삼각형의 개수에서 일직선 위에 있는 점들 중 3개를 고를 경우를 제한다.

1) 점 4 개가 한 직선 위에 있는 경우 : 10 가지

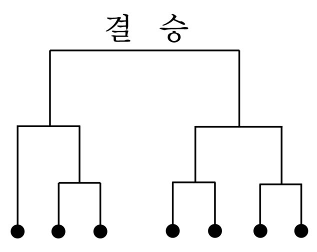


2) 점 3 개가 한 직선 위에 있는 경우 : 4 가지



$_{16}C_3 - ({}_4C_3 \times 10 + {}_3C_3 \times 4) = 516$

25. 7 개의 팀이 아래 그림과 같이 한 개 팀에게 부전승을 허용하여 토너먼트 방식으로 경기를 하려고 한다. 시합을 하는 방법의 수는?



① 315　② 378　③ 396　④ 412　⑤ 446

해설

7 개의 팀을 4 팀, 3 팀으로 나누는 경우의 수는

${}_7C_4 \times {}_3C_3 = 35$ (가지)

아래 왼쪽 조를 완성하는 방법의 수는

${}_3C_2 \times {}_1C_1 = 3$ (가지)

아래 오른쪽 조를 완성하는 방법의 수는

${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$ (가지)

따라서 구하는 방법의 수는 $35 \times 3 \times 3 = 315$ (가지)