1. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2},\ \frac{11}{2},\ -\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2},\ \frac{13}{2},\ \frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2},\ \frac{7}{2},\ -\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2},\ -\frac{13}{2},\ \frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2},\ -\frac{11}{2},\ \frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

2. 삼차방정식 $x^3-4x^2+x+k=0$의 한 근이 -1일 때, k의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$x=-1$을 대입하면

$(-1)^3-4-1+k=0 \quad \therefore k=6$

$x^3-4x^2+x+6=0$의 나머지 두 근을 α, β라 하면

세 근의 합 $4=-1+\alpha+\beta$에서 $\alpha+\beta=5$

$\therefore k+\alpha+\beta=11$

3. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, $1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -10　② -5　③ 0　④ 5　⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여
$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$
$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$
$\therefore\ a+b=-10$

4. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=-3$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\beta)-\alpha\beta\gamma$

$=1-2+4+3=6$

5. 삼차방정식 $x^3 - px + 2 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값은?

① $-p$ ② p ③ 0 ④ 3 ⑤ -3

해설

$\alpha+\beta+\gamma = 0$이므로 주어진 식은 $\frac{-\alpha}{\alpha} + \frac{-\beta}{\beta} + \frac{-\gamma}{\gamma} = -3$이 된다.

6. 삼차방정식 $x^3+3x^2-2x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 x의 삼차방정식은 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때, $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3+3x^2-2x-1=0$에서

$\alpha+\beta+\gamma=-3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$

$\alpha\beta\gamma=1$

$x^3+ax^2+bc+c=0$에서

$$\begin{aligned} -a &= \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \\ &= \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{-2}{1}=-2 \end{aligned}$$

$\therefore\ a=2$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{1}=-3 \end{aligned}$$

$\therefore\ b=-3$

$-c=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$

$\therefore\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=-2$

7. 삼차방정식 $2x^3+px^2+qx-5=0$ 의 한 근이 $1-2i$ 일 때 $p+q$ 의 값은?(단, p, q 는 실수)

① 7　　② -7　　③ 6　　④ -6　　⑤ 11

해설

한 근이 $1-2i$이므로 다른 두 근을 $1+2i, \alpha$ 라 하면 세 근의 곱:

$(1-2i)(1+2i)\alpha=\frac{5}{2}$

$\therefore\ \alpha=\frac{1}{2}$

세 근의 합: $-\frac{p}{2}=(1-2i)+(1+2i)+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$\therefore\ p=-5$

두근끼리 곱의 합 : $\frac{q}{2}=(1-2i)(1+2i)+(1-2i+1+2i)\cdot\frac{1}{2}=6$

$\therefore\ q=12$

$\therefore\ p+q=7$

해설

한 근이 $1-2i$ 이므로 다른 한 근은 $1+2i$

근과 계수의 관계에서 $x^2-2x+5=0$

나머지 일차식을 $2x+a$ 라고 하면

$2x^3+px^2+qx-5=(2x+a)(x^2-2x+5)$ 에서

$a=-1$ 이므로 대입하여 정리하면

$p=-5,\ q=12$

$\therefore\ p+q=7$

8. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면$(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.

$\therefore\ b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4,\ b = 6$ 이다.

$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

9. 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + px + q = 0$의 한 근은 $3 + \sqrt{2}$이다. 유리수 p, q의 값을 구했을 때, $p + q$의 값은?

① 6　　② 10　　③ -2　　④ -1　　⑤ 1

해설

$x^3 - 7x^2 + px + q = 0$의 세 근은 $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}, \alpha$

세 근의 합 : $\alpha + (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 7$

$\therefore\ \alpha = 1$

$p = (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) + \alpha(3-\sqrt{2}) + \alpha(3+\sqrt{2}) = 7+6 \quad \therefore\ p = 13$

$-q = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) \cdot 1 = 7$

$\therefore\ q = -7$

$\therefore\ p + q = 13 - 7 = 6$

10. 계수가 유리수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한근이 $2-\sqrt{3}$일 때, $\frac{c-b}{a}$의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

계수가 유리수인 이차방정식에서 $2-\sqrt{3}$이 근이면 $2+\sqrt{3}$도 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{b}{a}=\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=4$

$\frac{c}{a}=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$

$\therefore\ \frac{c-b}{a}=\frac{c}{a}+\left(-\frac{b}{a}\right)=1+4=5$

11. x에 대한 삼차방정식 $x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b의 합 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근을 $1 - \sqrt{2}$, 나머지 한 근을 β라 하면

$\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right)\beta + \left(1 - \sqrt{2}\right)\beta = 5$

$-1 + 2\beta = 5,\ 2\beta = 6 \quad \therefore\ \beta = 3$

따라서, $a = \left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(1 - \sqrt{2}\right) + 3 = 5$

$b = \left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right) \cdot 3 = -3$이므로

$a + b = 5 + (-3) = 2$

12. 사차방정식 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$의 서로 다른 실근은 모두 몇 개인가?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x-2)(x+1)(x-1) = 0$

$\therefore\ x = 2$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = -1$

13. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ＿＿＿＿＿ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$,

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3-4x^2-x+6=0$ 에서

$3x^3-8x^2-2x+12=0$을 풀면 $x=2(\text{cm})$

14. 방정식 $x^3+2x^2-3x+1=0$ 의 세 실근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 라 할 때, $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$ 의 값을 구하면?

① 7　　② 11　　③ 15　　④ 19　　⑤ 21

해설

근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\ \alpha\beta\gamma=-1$
$x^3+2x^2-3x+1=0$ 의 세 근이 $\alpha\ ,\beta\ ,\gamma$ 이므로 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ 이다. $x=2$ 를 대입하면 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=2^3-2^2(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=2^3+2\times2^2-2\times3+1$
$=8+8-6+1=11$

15. 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근 α, β, γ에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma=3$ 일 때, 방정식 $f(2x+3)=0$의 세 근의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

세 근의 합은 $\left(-\dfrac{x^2\text{의 계수}}{x^3\text{의 계수}}\right)$ 이므로

x^3 의 계수와 x^2 의 계수만 구하면 된다.

최고차항의 계수가 1 인 삼차방정식을

$f(x)$ 라 하면 세 근의 합이 3 이므로

$f(x)=x^3-3x^2+bx+d$

$f(2x+3)$

$=(2x+3)^3-3\cdot(2x+3)^2+b\cdot(2x+3)+d$

3 차항과 2 차항의 계수를 중심으로

식을 정리하면

$8x^3+24x^2+\ldots\cdots=0$

$\therefore$ 세 근의 합 $=-3$

해설

$f(2x+3)=0$의 세 근을

각각 $p,\ q,\ r$이라 하면,

$2p+3=\alpha \ \cdots$ ㉠

$2q+3=\beta \ \cdots$ ㉡

$2r+3=\gamma \ \cdots$ ㉢

㉠ + ㉡ + ㉢에서

$2(p+q+r)+9=3$

$\therefore\ p+q+r=-3$

16. 철수는 모든 모서리의 길이의 총합이 40 cm, 겉넓이는 62 cm^2, 부피가 30 cm^3 인 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 때, 이 상자의 가장 긴 모서리의 길이는 얼마로 해야 하겠는가?

① 3 cm ② 3.5 cm ③ 4 cm

④ 4.5 cm ⑤ 5 cm

해설

각 모서리의 길이를 x, y, z라고 하면
문제의 뜻에서
(i)$4(x+y+z)=40$
$\therefore\ x+y+z=10$
(ii)$2(xy+yz+zx)=62$
$\therefore xy+yz+zx=31$
(iii)$xyz=30$
따라서, x, y, z는 삼차방정식
$t^3-10t^2+31t-30=0$의 세 근이다.
$(t-2)(t-3)(t-5)=0$
$\therefore t=2,\ 3,\ 5$
이 중 가장 긴 모서리의 길이는 5(cm)이다.