1. 이차함수 $y = 2x^2 + kx - k$ 의 그래프가 x축과 만나도록 하는 상수 k 의 값이 아닌 것은?

① -8 ② -1 ③ 0 ④ 5 ⑤ 8

해설

이차방정식 $2x^2 + kx - k = 0$ 에서 $D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) \geq 0$ 이어야 하므로

$k^2 + 8k \geq 0,\ k(k+8) \geq 0$

$\therefore k \leq -8$ 또는 $k \geq 0$

따라서 위의 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ②이다.

2. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$ ② $k > 3,\ k < -1$ ③ $k > 1,\ k < -1$
④ $k > 3,\ k < -2$ ⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로
$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1-k)x + 1 = 0$ 에서
$\mathrm{D} = (1-\mathrm{k})^2 - 4 > 0$
$k^2 - 2k - 3 = (k-3)(k+1) > 0$
$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

3. 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2-6x+k$ 의 최솟값과 이차함수 $y=-3x^2+6x-3k+3$ 의 최댓값이 일치할 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{33}{4}$

해설

$y=\frac{1}{3}x^2-6x+k=\frac{1}{3}(x-9)^2-27+k$

최솟값은 $-27+k$

$y=-3x^2+6x-3k+3$

$=-3(x-1)^2+6-3k$

최댓값은 $6-3k$

$-27+k=6-3k$

$\therefore\ k=\frac{33}{4}$

4. 이차함수 $y = -x^2 + 4x - 3$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1$

최댓값 $m = 1$

$y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{3}(x+3)^2$

최솟값 $n = 0$

$\therefore mn = 1 \times 0 = 0$

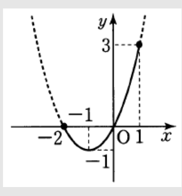
5. $-2 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $-2 \le x \le 1$ 에서
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.
즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$
따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,
$x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
구하는 합은 $3 - 1 = 2$



6. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

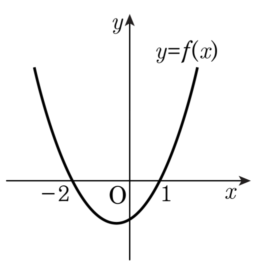
합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.

$y=x(18-x)=-x^2+18x=-(x^2-18x+81)+81$

$y=-(x-9)^2+81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

7. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① −3　　② −2　　③ −1
④ 0　　⑤ 1

해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.
$y = f(x)$ 이 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로
$y = f(x+a)$ 의 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$
따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이
$-2-a,\ 1-a$ 이고
그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a = 5$
$\therefore a = -3$

8. 직선 $y = ax + 1$ 이 두 이차함수 $y = x^2 + x + 2$, $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프와 모두 만나지 않도록 상수 a 의 값의 범위를 정하면 $\alpha < a < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① -5　② -3　③ 0　④ 3　⑤ 5

해설

직선과 이차함수를 연립하여 판별식이
0 보다 작으면 직선과 이차함수가 만나지 않는다.

1) $ax + 1 = x^2 + x + 2$	2) $ax + 1 = -x^2 + 4x$
$\Rightarrow x^2 + (1 - a)x + 1 = 0$	$\Rightarrow x^2 + (a - 4)x + 1 = 0$
$D = (a - 1)^2 - 4 < 0$	$\Rightarrow D = (a - 4)^2 - 4 < 0$
$\Rightarrow -1 < a < 3$	$\Rightarrow 2 < a < 6$

$\therefore$ 1), 2) 의 공통 해 : $2 < a < 3$
$\therefore \alpha + \beta = 5$

9. 이차함수 $y = -x^2 - 4x + k$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프가 x 축에 접할 때, 상수 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y = -x^2 - 4x + k$ 의 그래프를
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면
$y - (-3) = -x^2 - 4x + k$
$y = -x^2 - 4x + k - 3$
$\therefore\ y = -(x+2)^2 + k + 1$
이 그래프가 x 축에 접하려면
꼭지점의 y 좌표가 0 이어야 하므로 $k + 1 = 0$
$\therefore\ k = -1$

10. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2am - 2m + b$ 의 그래프가 m 의 값에 관계없이 x 축에 접할 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -1　② 1　③ 3　④ 4　⑤ 6

해설

이차방정식 $x^2 - 2ax + 2am - 2m + b = 0$ 에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (2am - 2m + b) = 0$

$\therefore a^2 - 2am + 2m - b = 0$

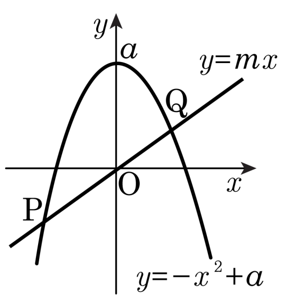
이 식이 m 의 값에 관계없이 성립하므로

$(2 - 2a)m + (a^2 - b) = 0$ 에서

$2 - 2a = 0,\ a^2 - b = 0$

따라서 $a = 1,\ b = 1$ 이므로 $ab = 1$

11. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

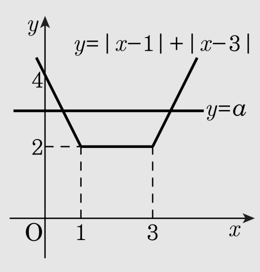
$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로
방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$
$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$
$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

12. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

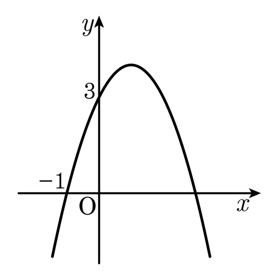
① $a<1$　② $a>1$　③ $a<2$　④ $a>2$　⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면
$a>2$



13. 아래 그림은 이차함수 $y = ax^2 + 2x + c$ 의 그래프이다. 이차함수의 최댓값은?



① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$
④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

해설

$y = ax^2 + 2x + c$ 에 점$(-1,\ 0)$, $(0,\ 3)$ 을 대입하면

$0 = a - 2 + c$
$3 = c,\ a = -1$

$y = -x^2 + 2x + 3$
$\therefore y = -(x-1)^2 + 4$
따라서 최댓값은 4 이다.

14. 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+x-5$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하면?

① 최솟값 : $-\frac{9}{2}$ ② 최댓값 : $-\frac{7}{2}$ ③ 최솟값 : $\frac{9}{2}$
④ 최댓값 : $-\frac{9}{2}$ ⑤ 최솟값 : -1

해설

$y=-\frac{1}{2}x^2+x-5$
$=-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{9}{2}$
따라서 $x=1$ 일 때, 최댓값 $-\frac{9}{2}$ 를 가진다.

15. 축의 방정식이 $x=3$ 이고, 점 $(2,\ 5)$ 를 지나고, y 절편이 37 인 이차함수의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

축의 방정식이 $x=3$ 이므로

$y=a(x-3)^2+q$

점 $(2,\ 5)$ 와 y 절편 $(0,\ 37)$ 를 지나므로

$5=a+q,\ 37=9a+q$

$a=4,\ q=1$

$\therefore\ y=4(x-3)^2+1$

따라서 $x=3$ 일 때, 최솟값은 1 이다.

16. 이차함수 $y = -2x^2 - 4ax + 8a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$y = -2x^2 - 4ax + 8a = -2(x + a)^2 + 2a^2 + 8a$

$\therefore M = 2a^2 + 8a = 2(a + 2)^2 - 8$

따라서 M 의 최솟값은 -8 이다.

17. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면
$y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \cdots$ ㉠
또, $t = (x - 1)^2 + 2$ 이므로
$t \geq 2 \cdots$ ㉡
㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은
$t = 2$일 때 1이다.

18. 차가 4 인 두 수 중에서 그 제곱의 합이 최소가 되는 두 수를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: -2

▷ 정답: 2

해설

두 수를 각각 x, $x+4$ 라 하면

$y = x^2 + (x+4)^2$

$= 2x^2 + 8x + 16$

$= 2(x+2)^2 + 8$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 8 을 갖는다.

$\therefore x = -2,\ x+4 = 2$

따라서 구하는 두 수는 -2, 2

19. $x^2 + 2y^2 = 4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $4x + 2y^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M + m$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x^2 + 2y^2 = 4$에서 $2y^2 = 4 - x^2$

이때, y는 실수이므로 $2y^2 = 4 - x^2 \geq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 2$

$4x + 2y^2 = 4x + 4 - x^2 = -(x-2)^2 + 8$

$(-2 \leq x \leq 2)$

따라서 $x = -2$일 때, 최솟값 $m = -8$이고,

$x = 2$일 때, 최댓값 $M = 8$이므로 $M + m = 0$

20. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x - 2)^2 - y^2 - z^2 + 9$
$x,\ y,\ z$는 실수이므로
$(x - 2)^2 \ge 0,\ y^2 \ge 0,\ z^2 \ge 0$
따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$는
$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$일 때,
최댓값 9를 갖는다.

21. $x^2+y^2=5$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x-y$는 $x=\alpha, y=\beta$에서 최댓값 m을 갖는다. 이때, $m+\alpha+\beta$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$2x-y=k$로 놓으면
$y=2x-k \cdots$ ㉠
㉠을 $x^2+y^2=5$에 대입하면
$x^2+(2x-k)^2=5$
$\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0 \cdots$ ㉡
㉡을 x에 대한 이차방정식으로 보면
x가 실수이므로
$\frac{D}{4}=4k^2-5(k^2-5)\ 0$, $k^2 \le 25$
$\therefore -5 \le k \le 5$
따라서 k의 최댓값은 5이다.
이 때의 x, y의 값은
㉡에서 $5x^2-20x+20=0$, $5(x-2)^2=0 \therefore x=2$
㉠에서 $y=4-5=-1$
따라서, $m=5, \alpha=2, \beta=-1$이므로
$m+\alpha+\beta=6$

22. $x^2 - 2x - y = 0$ 일 때, $3x^2 - 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2 - 2x - y = 0$ 에서 $y = x^2 - 2x$
이 식을 $3x^2 - 2y$ 에 대입하면
$3x^2 - 2(x^2 - 2x) = x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$
따라서, $x = -2$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.