

1. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = 0$ 을 풀면?

① $x = \pm 1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$

② $x = \pm 2, x = 1 \pm \sqrt{3}i$

③ $x = \pm 1, x = 1 \pm \sqrt{3}i$

④ $x = \pm 2, x = 1 \pm \sqrt{2}i$

⑤ $x = \pm 2, x = 3 \pm \sqrt{2}i$

해설

조립제법을 이용한다.

1	1	-2	2	2	-3
		1	-1	1	3
-1	1	-1	1	3	0
		-1	2	-3	
	1	-2	3	0	

$$\Rightarrow (x-1)(x+1)(x^2-2x+3)=0$$

$$\therefore x = \pm 1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$$

2. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을 a , 가장 큰 근을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$$

$$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{5}, x = \pm\sqrt{6}$$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$$

3. 다음 중 사차방정식 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ 의 근에 해당하는 것을 모두 고르면?

① $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

② $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

③ $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

④ $1 + \sqrt{3}i$

⑤ $\frac{\sqrt{3} - i}{2}$

해설

$x^4 + x^2 + 1 = 0$ 을 변형하면

$$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0,$$

$$(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0$$

$$(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = 0,$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{ 또는 } x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

4. $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① 4

② -4

③ 8

④ -8

⑤ -16

해설

$x^4 - 5x^2 - 14 = (x^2 + 2)(x^2 - 7) = 0$ 이므로

두 허근 α, β 는

각각 $\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = -2 - 2 = -4$$

5. 삼차방정식 $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때,
 $\alpha - \beta - \gamma$ 의 값은?(단, $\alpha < \beta < \gamma$)

① -3

② -4

③ -5

④ -6

⑤ -7

해설

$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ 인수분해하여 해를 구하면

$$(x-1)(x-2)(x-5) = 0$$

$$\therefore \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 5$$

$$\therefore \alpha - \beta - \gamma = 1 - 2 - 5 = -6$$

6. 방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 1$ 을 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 몫을 다음 조립제법으로 구한다.

1		1	-6	11	-6
			1	-5	6
		1	-4	5	0

$$\therefore f(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

7. 방정식 $(x^2 + x + 2)^2 + 8 = 12(x^2 + x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1

② 0

③ -1

④ -2

⑤ -3

해설

$$x^2 + x = Y \text{ 라 하면, } (Y + 2)^2 + 8 = 12Y$$

$$Y^2 - 8Y + 12 = 0, (Y - 2)(Y - 6) = 0$$

$$Y = 2 \text{ 또는 } Y = 6$$

$$(i) Y = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

$$(ii) Y = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore \text{ 모든 근의 합} = -2$$

8. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$ 을 풀면?

① $x = -2$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{3}$

② $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -5$

③ $x = -2 \pm \sqrt{5}$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{6}$

④ $x = -3 \pm \sqrt{5}i$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{6}i$

⑤ $x = -1$ 또는 $x = -5$ 또는 $-3 \pm \sqrt{6}$

해설

$$x(x+6) = x^2 + 6x$$

$$(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$$

$$x^2 + 6x = X \text{ 로 놓으면}$$

$$x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$$

$$X(X+8) + 15 = 0,$$

$$X^2 + 8X + 15 = 0$$

$$(X+3)(X+5) = 0$$

$$\therefore X = -3, X = -5$$

$$\textcircled{㉠} : X = -3 \Rightarrow x^2 + 6x + 3 = 0,$$

$$x = -3 \pm \sqrt{9-3} = -3 \pm \sqrt{6}$$

$$\textcircled{㉡} : X = -5 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0,$$

$$(x+5)(x+1) = 0, x = -1, -5$$

9. 사차식 $x^4 - 4x^2 - 12$ 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

② $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + 2i)(x - 2i)$

③ $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

④ $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 2i)(x - 2i)$

⑤ $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{6}i)(x - \sqrt{6}i)$

해설

$$x^4 - 4x^2 - 12, \quad x^2 = Y \text{ 라 하자}$$

$$\Rightarrow Y^2 - 4Y - 12 = (Y + 2)(Y - 6) = 0$$

$$Y = -2 \text{ 또는 } Y = 6$$

$$\Rightarrow x^2 = -2, \quad x^2 = 6$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{2}i, \quad x = \pm \sqrt{6}$$

$$\therefore x^4 - 4x^2 - 12$$

$$= (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$$

10. 다음 방정식의 해가 아닌 것은?

$$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$$

① -3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 2

해설

$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$ 에서 $x^2 + x = X$ 라 하면

$$X^2 - 8X + 12 = 0, (X - 2)(X - 6) = 0$$

$\therefore X = 2$ 또는 $X = 6$

(i) $X = 2$ 일 때, $x^2 + x = 2$ 에서

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = -2$

(ii) $X = 6$ 일 때, $x^2 + x = 6$ 에서

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x = -3$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$

따라서, 해가 아닌 것은 ③

11. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 2x = t \text{ 로 놓으면}$$

$$t(t - 2) - 3 = 0,$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t - 3)(t + 1) = 0$$

$$\therefore t = 3 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ t = 3, \text{ 즉 } x^2 - 2x = 3 \text{ 일 때}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

$$(ii) \ t = -1, \text{ 즉 } x^2 - 2x = -1 \text{ 일 때}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ (중근)}$$

$$\text{따라서, } -1 \times 3 \times 1 = -3$$

12. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$$(x^2 - 2x)^2 - 6(x^2 - 2x) - 16 = 0$$

① 4

② -4

③ -2

④ $1 + i$

⑤ $1 - i$

해설

$x^2 - 2x = X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2 - 6X - 16 = 0, (X - 8)(X + 2) = 0$$

$$\therefore x = 8 \text{ 또는 } X = -2$$

(i) $X = 8$ 일 때 $x^2 - 2x = 8$ 에서 $(x - 4)(x + 2) = 0$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

(ii) $X = -2$ 일 때 $x^2 - 2x = -2$ 에서 $x^2 - 2x + 2 = 0$

$$\therefore x = 1 \pm i$$

따라서 (i), (ii)에서 $x = 4$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1 \pm i$

13. 사차방정식 $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 근 중에서 제일 큰 근을 α , 제일 작은 근을 β 라 할 때, $\alpha - \beta$ 의 값은?

① $\sqrt{5}$

② $\frac{\sqrt{5}}{2}$

③ $1 - \sqrt{5}$

④ $2 - \sqrt{5}$

⑤ $3 - \sqrt{5}$

해설

양근을 x^2 으로 나누면

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 라 하면

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \rightarrow t = 2, 3$$

i) $t = 2$ 일 때

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\therefore x = 1$$

ii) $t = 3$ 일 때

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \alpha - \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

14. 방정식 $2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ 의 모든 실근의 합을 a , 모든 허근의 곱을 b 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 5

② 3

③ $\frac{3}{2}$

④ -2

⑤ 4

해설

$2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ 양변을
 x^2 으로 나누고 정리하면

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

$$2t^2 - 5t - 3 = (2t + 1)(t - 3) = 0$$

$$\left(2x + \frac{2}{x} + 1\right)\left(x + \frac{1}{x} - 3\right) = 0$$

$$\therefore (2x^2 + x + 2)(x^2 - 3x + 1) = 0$$

이 때, $2x^2 + x + 2 = 0$ 은 허근을 갖고,

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 은 실근을 가지므로

실근의 합 $a = 3$, 허근의 곱 $b = 1$ 이다.

$$\therefore a + b = 4$$

15. 사차방정식 $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$ 의 해는?

① $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

② $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

③ $x = \frac{-15 \pm \sqrt{221}}{2}$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

④ $x = \frac{15 \pm \sqrt{221}}{2}$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $x = 15 \pm \sqrt{221}$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

해설

$x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + 8x + 17 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 17 = 0$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = A \text{라 하자.}$$

$$A^2 + 8A + 15 = (A + 3)(A + 5)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x} + 3\right)\left(x + \frac{1}{x} + 5\right) = 0$$

$$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 5x + 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$