1. 다음 유리식을 간단히 하시오.

$$\frac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}}$$

① 1　② x　③ $-x$　④ $\frac{1}{x}$　⑤ $-\frac{1}{x}$

해설

(준식)$=\dfrac{\frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)}}{\frac{(1+x)-(1-x)}{(1-x)(1+x)}}=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$

해설

주어진 식의 분모와 분자에 $(1-x)(1+x)$ 를 곱하면

(준식)

$=\dfrac{\frac{1}{1-x}(1-x)(1+x)+\frac{1}{1+x}(1-x)(1+x)}{\frac{1}{1-x}(1-x)(1+x)-\frac{1}{1+x}(1-x)(1+x)}$

$=\dfrac{(1+x)+(1-x)}{(1+x)-(1-x)}=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$

2. $x : y = 2 : 3$일 때, $\dfrac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy}$의 값을 구하여라.

① $\dfrac{12}{5}$ ② $\dfrac{5}{12}$ ③ $\dfrac{13}{5}$ ④ $\dfrac{5}{13}$ ⑤ 5

해설

$x : y = 2 : 3 \Rightarrow x = 2k, y = 3k$

$\dfrac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy} = \dfrac{3(2k)^2 + 2(2k)(3k)}{4k^2 + (2k)(3k)}$

$= \dfrac{24k^2}{10k^2} = \dfrac{24}{10} = \dfrac{12}{5}$

3. 함수 $y = \dfrac{x+3}{x-3}$ 은 $y = \dfrac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이다. $m+n$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = \dfrac{x+3}{x-3} = 1 + \dfrac{6}{x-3}$

$y = \dfrac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축으로 3 , y 축으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m = 3,\ n = 1$

$m + n = 4$

4. 함수$y = \dfrac{ax+b}{x-2}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(3,-2)$ 를 지날 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

$f(x) = \dfrac{ax+b}{x-2}$ 의 그래프가 점$(3,-2)$ 를 지나므로 $f(3) = -2$
$\Rightarrow -2 = 3a+b \cdots ①$
또, 이 함수의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 가 점 $(3,-2)$ 을 지나므로
$f^{-1}(3) = -2 \Rightarrow f(-2) = 3$
$\Rightarrow 3 = \dfrac{-2a+b}{-4}$
$\Rightarrow -2a+b = -12 \cdots ②$
①, ② 에서 $a = 2, b = -8$
$\therefore a+b = -6$

5. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$일 때, $\sqrt{(a-b)^2} - |b|$를 간단히 하면?

① $-2a$　② $-a$　③ $a-2b$

④ a　⑤ 0

해설

$a \geq 0,\ b < 0$

$|a-b| - |b| = (a-b) + b = a$

6. 함수 $y = \sqrt{2x-4}+b$ 의 정의역이 $\{ x \mid x \geq a \}$이고, 치역이 $\{ y \mid y \geq -3 \}$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 ab의 값은?

① -6 ② -3 ③ 1 ④ 3 ⑤ 6

해설

$2x-4 \geq 0$ 에서 $2x \geq 4$

$\therefore\ x \geq 2$

주어진 함수의 정의역이 $\{ x \mid x \geq 2 \}$ 이므로

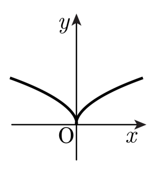
$a = 2$

함수 $y = \sqrt{2x-4}+b$ 의 치역은 $\{ y \mid y \geq b \}$ 이므로 $b = -3$

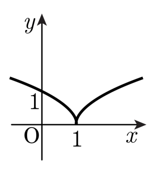
$\therefore\ ab = -6$

7. 다음 중 함수 $y = \sqrt{|x+1|}$의 그래프를 구하면?

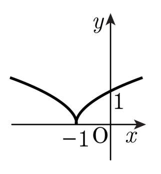
①



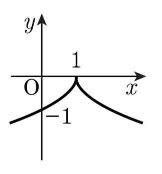
②



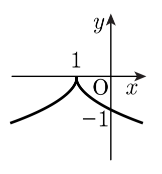
③



④



⑤



해설

$x \geq -1$ 이면 $y = \sqrt{x+1}$
$x < -1$ 이면 $y = \sqrt{-x-1}$ 이므로
3번이 정답임.

8. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 5 또는 8 이 되는 경우의 수는?

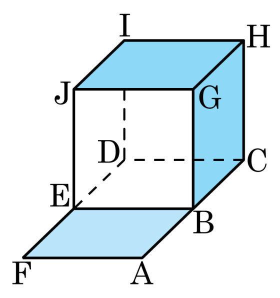
① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

서로 다른 두 개의 주사위의 눈의 수를 순서쌍 (x, y) 로 나타내면

(i) 눈의 합이 5 가 되는 경우는
$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$: 4 가지
(ii) 눈의 합이 8 이 되는 경우는
$(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$: 5 가지
그런데 (i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로
$4 + 5 = 9$ (가지)
$\therefore 9$

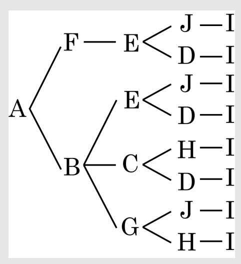
9. 다음그림은 정육면체의 뚜껑이 열려 있는 상태를 나타낸 것이다. A 에서 I 까지 최단 거리로 모서리를 따라가는 방법의 수는?



① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

A 에서 I 까지 최단 거리로 수형도를 그려보면



위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 8가지이다.

10. 남자 4명, 여자 6명 중에서 남자 2명, 여자 3명을 뽑는 방법은 몇 가지인가?

① 36 ② 72 ③ 120 ④ 144 ⑤ 156

해설

${}_4C_2 \times {}_6C_3 = 120$

11. 등식 $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1}$ 이 x 에 대한 항등식이 될 때, $A-B$ 의 값을 구하면? (단, $A,\ B$ 는 상수)

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

주어진 식의 우변을 정리하면

$\dfrac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \dfrac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$

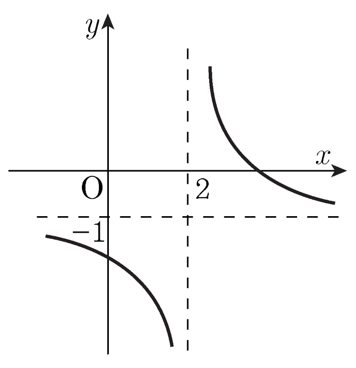
따라서 $\dfrac{(A+B)x+A}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x(x+1)}$ 이므로

$A+B=0,\ A=1$

$\therefore\ B=-1$

$\therefore\ A-B=1-(-1)=2$

12. 분수함수 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 무리함수 $y=\sqrt{cx+a}+b$의 그래프가 지나는 사분면을 모두 구하면?



① 제1사분면 ② 제2사분면 ③ 제3사분면
④ 제4사분면 ⑤ 제1, 2사분면

해설

$y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 점근선은 $x=-a,\ y=c$

그림에서 $-a>0,\ c<0$이고, $b>0$

$\therefore\ a<0,\ b>0,\ c<0\cdots$㉠

한편 $y=\sqrt{cx+a}+b=\sqrt{c\left(x+\dfrac{a}{c}\right)}+b$이므로

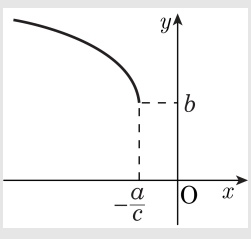
$c\left(x+\dfrac{a}{c}\right)\geq 0$

이때 $c<0$이므로 $x\leq -\dfrac{a}{c}$

㉠에서 $-\dfrac{a}{c}<0$이므로 $x<0$

또 $y=\sqrt{cx+a}+b\geq b$

따라서 그래프는 다음 그림과 같이



제2사분면만을 지난다.

13. $-\frac{1}{3} \le x \le \frac{8}{3}$ 에서 함수 $y = \sqrt{3x+a}+2$ 의 최댓값이 b , 최솟값이 2 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = \sqrt{3x+a}+2 = \sqrt{3\left(x+\frac{a}{3}\right)}+2$

주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{a}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다.

i) $x = -\frac{1}{3}$ 일 때 최솟값을 가지므로

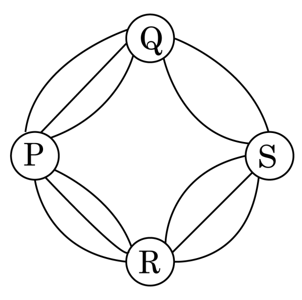
$$2 = \sqrt{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+a}+2 \quad \therefore\ a = 1$$

ii) $x = \frac{8}{3}$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$b = \sqrt{3\cdot\frac{8}{3}+1}+2 = 5$$

i), ii) 에서 $a+b = 1+5 = 6$

14. 네 지점 P, Q, R, S 를 연결하는길이 아래 그림과 같다. 같은 지점을 두 번 이상 지나지 않고 P 에서 S 로가는 길을 택하는 방법은 몇가지인지 구하여라.



▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 15 가지

해설

(1) $P \rightarrow Q \rightarrow S$ 인 경우 $3 \times 2 = 6$ (가지)
(2) $P \rightarrow R \rightarrow S$ 인 경우 $3 \times 3 = 9$ (가지)
이때, (1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로, 구하는 방법의 수는 $6 + 9 = 15$ (가지) 이다.

15. 5000 원 짜리 지폐가 2 장, 1000 원짜리 지폐가 3 장, 500 원짜리 동전이 4 개 있다. 이 동전의 일부 또는 전부를 사용하여 지불할 수 있는 방법의 수를 구하여라.

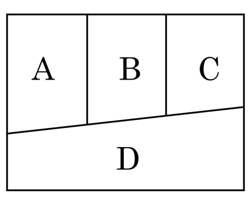
▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 59 가지

해설

5000 원짜리 지폐를 지불하는 방법의 수는 3 가지
1000 원짜리 지폐를 지불하는 방법의 수는 4 가지
500 원짜리 동전을 지불하는 방법의 수는 5 가지
이때 지불하지 않는 경우가 1 가지이므로
구하는 방법의 수는 $3 \times 4 \times 5 - 1 = 59$

16. 다음 그림의 네 부분에 4 가지 색을 사용하여 색칠을 하려고 한다. 한 가지 색을 여러 번 쓸 수 있고, 인접한 부분은 서로 다른 색이 칠해져야 한다면 칠하는 방법은 몇 가지인가?



① 24　② 48　③ 72　④ 96　⑤ 108

해설

가장 영역이 넓은 D 영역부터 칠한다면,
$4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$
$\therefore$ 48 가지

17. 다음은 ${}_{10}P_5 = (\boxed{\text{가}}) + (\boxed{(\text{나}})$ 임을 보인 것이다.

> 10개의 숫자 1, 2, 3, $\cdots$, 9,10중에서 서로 다른 5개의 숫자를 뽑아서 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는 ${}_{10}P_5$ 이다.
> 이 때, 다섯 자리의 자연수 중에서 숫자 2가 들어있는 것의 개수는 $(\boxed{\text{가}})$, 숫자 2가 들어 있지 않은 것의 개수는 $(\boxed{\text{나}})$ 이다.
> 따라서 다음 등식이 성립한다.
> ${}_{10}P_5 = (\boxed{\text{가}}) + (\boxed{\text{나}})$

위의 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① ${}_9P_4, 5{}_9P_5$　② $5{}_9P_4,\ {}_9P_5$　③ ${}_9P_4,\ {}_8P_5$
④ ${}_8P_4,\ 4{}_9P_5$　⑤ $4{}_9P_4,\ {}_9P_5$

해설

다섯 자리의 자연수 중 2가 들어 있는 것의 개수는 2를 제외한 9개의 숫자중에서
4개를 택하여 나열한 후 2를 추가하면 되므로 ${}_9P_4 \times 5 = 5{}_9P_4$
2가 들어 있지 않은 것의 개수는 2를 제외한 9개의 숫자에서 5개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_9P_5$ 이다.
따라서 ${}_{10}P_5 = 5{}_9P_4 +{}_9 P_5$

18. 백인종 2 명, 흑인종 3 명, 황인종 2 명을 일렬로 세울 때, 백인종은 백인종끼리, 흑인종은 흑인종끼리 이웃하여 서는 경우의 수를 구하면?

① 24 ② 144 ③ 210 ④ 288 ⑤ 720

해설

백인종과 흑인종을 각각 한 묶음으로 본다.

$4! \times 2! \times 3! = 288$

19. 남자 4명, 여자 3명을 일렬로 세울 때, 여자끼리는 이웃하지 않도록 서는 경우의 수는?

① 720 ② 960 ③ 1280 ④ 1440 ⑤ 1560

해설

먼저 남자 4명을 줄 세운 다음 양 끝과 남자 사이의 5자리 중 3 자리를 골라 여자들을 배치한다.

$4! \times {}_5P_3 = 1440$

20. 남학생 5 명, 여학생 3 명을 일렬로 세울 때, 양 끝에는 남학생을 세우고 여학생끼리는 서로 이웃하게 세우는 방법의 수는?

① 144 ② 288 ③ 864 ④ 1526 ⑤ 2880

해설

양 끝에 남학생 2명을 세우는 방법의 수는 ${}_5P_2$ (가지),
여학생끼리 서로 이웃하게 세워야 하므로 여학생 3명을 한 명으로 생각하여 남은 남학생 3명과 세우는 방법의 수는 4! (가지)
이때, 여학생 3명끼리 자리를 바꿀 수 있으므로 그 방법의 수는 3! (가지)
따라서 구하는 방법의 수는
${}_5P_2 \times 4! \times 3! = 20 \times 24 \times 6 = 2880$ (가지)

21. *april* 의 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, p, r, l 은 이 순서로 나열하는 방법의 수는?

① 20 ② 24 ③ 30 ④ 60 ⑤ 120

해설

5 개의 문자를 나열한 후 p, r, l 을 나열하는 방법의 수로 나눈다.

$\therefore \dfrac{5!}{3!} = 20$

22. $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 을 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수 중에서 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 모두 3 의 배수인 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답: ________ 개

▷ 정답: 48 개

해설

일의 자리의 수 a 와 백의 자리의 수 b 는 3 또는 6 이 되어야 하므로
a, b 를 정하는 방법의 수는 $2! = 2$ (가지)
이 때, 나머지 자리의 수는 $1, 2, 4, 5$ 중 어느 하나가 정해지면 되므로
나머지 네 자리의 수를 정하는 방법의 수는 $4! = 24$ (가지)
따라서, 구하는 자연수의 개수는
$2 \times 24 = 48$ (개)

23. 서로 다른 네 개의 다리를 서로 다른 네 개의 건설 팀이 건설하는데 두 팀씩 2 개조로 나누어서 각 조가 2 개씩 나누어 맡아서 건설하기로 하였다. 건설하는 방법의 수는?

① 15　② 18　③ 21　④ 24　⑤ 27

해설

서로 다른 4 개의 다리를 2 개씩 나누는 가지수는

$_4C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$

서로 다른 네 개의 건설 팀을 두 팀씩 2 개조로 나누는 가지수

$_4C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$

2 개조가 나누어진 2 개동 중 하나를 선택하는 가지수는 2가지

따라서, 건설하는 방법의 수는

$3 \times 3 \times 2 = 18$ (가지) 이다.

24. $a+b+c=0$일 때, $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

(주어진 식)

$=\frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(c+a)}{ca}+\frac{c(a+b)}{ab}$

$=\frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}{abc}$

$=\frac{(b+c)^3+b^2(-b)+c^2(-c)}{-(b+c)bc}$

$=\frac{(b+c)^3-(b^3+c^3)}{-(b+c)bc}$

$=\frac{3bc(b+c)}{-(b+c)bc}=-3$

25. $\dfrac{2b+3c}{a}=\dfrac{3c+a}{2b}=\dfrac{a+2b}{3c}=k$라 할 때, k의 값으로 가능한 것을 모두 고르면?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

(분모의 합)$=a+2b+3c$

ⅰ) $a+2b+3c=0$일 때

$2b+3c=-a,\ 3c+a=-2b,\ a+2b=-3c$이므로

주어진 식에 각각 대입하면

$\dfrac{-a}{a}=\dfrac{-2b}{2b}=\dfrac{-3c}{3c}=k$

$\therefore\ k=-1$

ⅱ) $a+2b+3c\neq 0$일 때

$$k=\frac{2b+3c}{a}=\frac{3c+a}{2b}=\frac{a+2b}{3c}$$

$$=\frac{2a+4b+6c}{a+2b+3c}\ (\because \text{가비의 리})$$

$$=\frac{2(a+2b+3c)}{a+2b+3c}=2$$

ⅰ), ⅱ)에서 $k=-1$ 또는 $k=2$

26. 분수함수 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ 의 그래프와 $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ 의 그래프에 대한 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

Ⅰ. $f(0) = g(0) = -1$
Ⅱ. $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프는 서로 y 축에 대하여 대칭이다.
Ⅲ. $y = f(x-1)$ 의 그래프와 $y = g(x+1)$ 의 그래프의 점근선은 같다.

① Ⅰ ② Ⅰ, Ⅱ ③ Ⅰ, Ⅲ
④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

해설

Ⅰ. $f(0) = -1,\ g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = -1$

$\therefore f(0) = g(0) = -1$ -<참>

Ⅱ. $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것은 $y = f(-x)$ 이므로

$y = f(-x) = \dfrac{-x-1}{-x+1}$

$= \dfrac{x+1}{x-1}$

$= \dfrac{1}{f(x)}$

$= g(x)$ -<참>

Ⅲ. $y = f(x-1) = \dfrac{x-2}{x} = 1 - \dfrac{2}{x}$

따라서, 점근선은 $x = 0, y = 1$

$y = g(x+1) = \dfrac{x+2}{x} = 1 + \dfrac{2}{x}$

따라서 점근선은 $x = 0, y = 1$ -<참>

따라서 옳은 것은 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) 이다.

27. $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$, $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ 일 때, $\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{x+y}{4}}-\sqrt{1-\dfrac{x+y}{4}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$

$y=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$, $x+y=2\sqrt{3}$

$$\sqrt{1+\frac{x+y}{4}}=\sqrt{1+\frac{2\sqrt{3}}{4}}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$$
$$\sqrt{1-\frac{x+y}{4}}=\sqrt{1-\frac{2\sqrt{3}}{4}}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$$

주어진 식에 대입하면

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$$

28. 여섯 개의 알파벳 I, L, O, V, E, U 를 일렬로 배열할 때, 적어도 네 개의 알파벳 L, O, V, E가 이웃하여 $LOVE$ 로 나타나지 않는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 714 가지

해설

6 개의 알파벳을 일렬로 배열하는 방법의 수는 $6!$ 이고 L, O, V, E 을 묶어 일렬로 나열하는 방법의 수,
즉 $LOVE$ 가 나타나는 경우의 수는 $3!$ 이므로
구하는 경우의 수는 $6! - 3! = 720 - 6 = 714$

29. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. ${}_{3n}C_{n-1} = {}_{3n}C_{2n+1}$

ㄴ. ${}_{4n}P_{3}n = (3n)! \times {}_{4n}C_{n}$

ㄷ. ${}_{2n+1}C_{n+2} = {}_{2n}C_{n-1} + {}_{2n}C_{n-2}$ (단, $n \geq 2$)

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ , ㄷ

해설

㉠ ${}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r}$ 이므로

${}_{3n}C_{n-1} = {}_{3n}C_{3n-(n-1)} = {}_{3n}C_{2n+1}$ (참)

㉡ ${}_{n}C_{r} = \frac{{}_{n}P_{r}}{r!}$ 에서

${}_{n}P_{r} = r! \times {}_{n}C_{r}$

$$\begin{aligned} {}_{4n}P_{3n} &= (3n)! \times {}_{4n}C_{3n} \\ &= (3n)! \times {}_{4n}C_{4n-3n} \\ &= (3n)! \times {}_{4n}C_{n} \text{(참)} \end{aligned}$$

㉢ ${}_{n}C_{r} = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_{r}$ 이므로

$$\begin{aligned} {}_{2n+1}C_{n+2} &= {}_{2n}C_{n+1} + {}_{2n}C_{n+2} \\ &= {}_{2n}C_{2n-(n+1)} + {}_{2n}C_{2n-(n+2)} \\ &= {}_{2n}C_{n-1} + {}_{2n}C_{n-2} \text{(참)} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢ 이다.

30. 1 부터 9 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 아홉 장의 카드가 있다. 이 중 4 장의 카드를 뽑아 갑에게 2 장, 을에게 2 장을 주었을 때, 뽑힌 4 장 중 제일 작은 수가 적힌 카드가 갑에게 있을 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 378 가지

해설

9장 중 4장의 카드를 뽑는 방법의 수는

${}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$

뽑힌 4장의 카드 중 제일 작은 수의 카드는 갑에게 주고, 나머지 3장 중 1장의 카드만 갑에게 주면 나머지 2장은 을에게 간다.

$\therefore\ {}_9C_4 \cdot {}_3C_1 = 378$