1. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$　　② $1 < k < 3$

③ $k < 3$　　④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$$

$k^2 - 6k + 5 > 0$, $(k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

2. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$　② $k > 3,\ k < -1$　③ $k > 1,\ k < -1$

④ $k > 3,\ k < -2$　⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로

$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1-k)x + 1 = 0$ 에서

$\mathrm{D} = (1-\mathrm{k})^2 - 4 > 0$

$k^2 - 2k - 3 = (k-3)(k+1) > 0$

$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

3. 이차함수 $y = 12x - (1+3x)(1-3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p+q$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{17}{3}$ ② $-\frac{5}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$y = 12x - (1+3x)(1-3x) = 9x^2 + 12x - 1$

$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$p = -\frac{2}{3}$, $q = -5$

$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$

4. 이차함수 $y=-x^2+4x-3$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2+2x+3$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$

최댓값 $m=1$

$y=\frac{1}{3}x^2+2x+3=\frac{1}{3}(x+3)^2$

최솟값 $n=0$

$\therefore mn=1\times 0=0$

5. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2 \ \therefore\ a + b = 14$

6. 직선 $y=3x+2$ 와 포물선 $y=x^2+mx+3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m<-1, m>3$ ② $m<1, m>5$ ③ $-1<m<3$

④ $-1<m<5$ ⑤ $1<m<5$

해설

$y=3x+2, y=x^2+mx+3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2+(m-3)x+1=0, D=(m-3)^2-4>0$

$m^2-6m+5>0, (m-1)(m-5)>0$

$\therefore\ m<1,\ m>5$

7. 두 이차함수 $y = x^2$, $y = -x^2 - 2x - 1$ 의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, 상수 a, b 에 대하여 $a^3 + b^3$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

① -9 ② -8 ③ -7 ④ -6 ⑤ -5

해설

이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와
직선 $y = ax + b$ 가 접하므로
이차방정식 $x^2 = ax + b$,
즉 $x^2 - ax - b = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 할 때,
$D_1 = (-a)^2 - 4 \cdot (-b) = 0$, $a^2 + 4b = 0$
$\therefore\ 4b = -a^2 \quad \cdots ㉠$
또, 이차함수 $y = -x^2 - 2x - 1$ 의 그래프와
직선 $y = ax + b$ 가 접하므로
이차방정식 $-x^2 - 2x - 1 = ax + b$,
즉 $x^2 + (a + 2)x + b + 1 = 0$ 의 판별식을
D_2 라 할 때,
$D_2 = (a + 2)^2 - 4(b + 1) = 0$
$\therefore\ a^2 + 4a - 4b = 0 \quad \cdots ㉡$
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $2a^2 + 4a = 0$
$2a(a + 2) = 0 \qquad \therefore\ a = -2\ (\because\ a \neq 0)$
$a = -2$ 를 ㉠에 대입하면
$4b = -4 \qquad \therefore\ b = -1$
$\therefore\ a^3 + b^3 = (-2)^3 + (-1)^3 = -9$

8. 함수 $y=-x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y=-x^2+kx$가 $y=-x+4$에 접하려면

$4-x=-x^2+kx \;\Rightarrow\; x^2-(k+1)x+4=0$의 판별식은 $D=0$

이어야 한다.

$D=(k+1)^2-16=0 \;\Rightarrow\; k+1=\pm4$

$\therefore k=3\ (\because k>0)$

9. 이차함수 $y=-x^2+2x+10$ 의 최댓값을 M , $y=3x^2+6x-5$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$y=-x^2+2x+10$$
$$=-(x-1)^2+11,\ \ M=11$$
$$y=3x^2+6x-5$$
$$=3(x+1)^2-8,\ \ m=-8$$
$$\therefore M+m=11-8=3$$

10. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -19

해설

$y = x^2 - 6x - 10 = (x-3)^2 - 19$

$x = 3$ 일 때, 최솟값은 -19 이다.

11. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 $x = 1$에서 최솟값 1을 가지고 $f(2) = 3$을 만족시킬 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a + b + c$의 값은?

① -4 ② -3 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

해설

$f(x) = a(x-1)^2 + 1$ 에서 $f(2) = 3$ 이므로

$a + 1 = 3 \quad \therefore a = 2$

즉, $f(x) = 2(x-1)^2 + 1 = 2x^2 - 4x + 3$ 이므로

$b = -4, \ c = 3$

$\therefore a + b + c = 2 - 4 + 3 = 1$

12. $x=-2$ 일 때, 최댓값 3을 가지고, 점 $(0,\ -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y=-\frac{3}{2}(x-2)^2+3$ ② $y=-\frac{3}{2}(x+2)^2+3$

③ $y=-\frac{2}{3}(x-2)^2+3$ ④ $y=-\frac{2}{3}(x+2)^2+3$

⑤ $y=-2x^2+3$

해설

$x=-2$ 일 때, 최댓값 3을 가진다는 것은 그래프가 위로 볼록하고, $y=a(x+2)^2+3$ 의 형태임을 의미한다.
이 중 $(0,\ -3)$ 을 지나면,

$$-3=4a+3$$
$$4a=-6$$
$$a=\frac{3}{2}$$
$$\therefore\ y=-\frac{3}{2}(x+2)^2+3$$

13. 이차함수 $y=x^2-2ax+3$ 이 $x=-3$ 에서 최솟값 m 을 가질 때, $a-m$ 의 값은?

① -9 ② 6 ③ 3 ④ -3 ⑤ -6

해설

$y=x^2-2ax+3=(x-a)^2-a^2+3$

$x=-3$ 에서 최솟값 m 을 가지므로

$a=-3, -a^2+3=m,\ m=-6$

$\therefore a-m=-3-(-6)=3$

14. 이차함수 $y = x^2 + 4x + k$ 의 최솟값이 -4 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

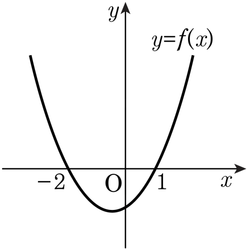
해설

$$y = x^2 + 4x + k$$
$$= (x+2)^2 - 4 + k$$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 $-4 + k$ 를 가지므로

$-4 + k = -4 \qquad \therefore\ k = 0$

15. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a)=0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3 ② -2 ③ -1

④ 0 ⑤ 1

해설

$y=f(x+a)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y=f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y=f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

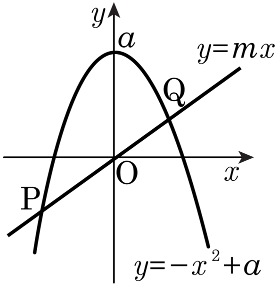
따라서, 방정식 $f(x+a)=0$ 의 두 실근이

$-2-a,\ 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$

$\therefore a=-3$

16. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

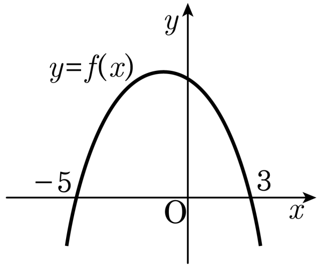
$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로
방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$$

$$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$$

$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

17. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\dfrac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ $(a<0)$으로 놓으면

$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right)$$
$$= \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$이므로

$\dfrac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\dfrac{x-4}{2}\right) = 0$의 두 근의 합은 4