1. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 3)$, $\mathrm{Q}(1,\ a)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$
$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$
양변을 제곱하면 $2a^2 - 8a + 10 = 2$
$2a^2 - 8a + 8 = 0$, $a^2 - 4a + 4 = 0$, $(a-2)^2 = 0$
$\therefore\ a = 2$

2. $3\overline{\mathrm{PA}} = 2\overline{\mathrm{PB}}$가 되도록 하는 선분 AB 위의 점 P에 대하여 $\mathrm{A}(-3, 2)$이고, $\mathrm{P}(1, 0)$일 때, 점 B의 x좌표와 y좌표의 합은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$3\overline{\mathrm{PA}} = 2\overline{\mathrm{PB}}$이므로
$\overline{\mathrm{PA}} : \overline{\mathrm{PB}} = 2 : 3$이고,
점 P가 선분 AB 위의 점이므로
점 P는 선분 AB를 $2 : 3$으로 내분하는 점이다.
이 때, 점 B의 좌표를 $\mathrm{B}(a, b)$라 하면

$$\left(\frac{2\times a+3\times(-3)}{2+3},\ \frac{2\times b+3\times 2}{2+3}\right) = (1, 0)$$

$$\frac{2a-9}{5} = 1,\ \frac{2b+6}{5} = 0$$

$\therefore\ a = 7, b = -3$

$\therefore\ a + b = 4$

3. y 절편이 3이고, 직선 $2x+y-1=0$에 수직인 직선의 방정식은?

① $y=-2x+3$ ② $y=-\frac{1}{2}x-3$ ③ $y=-x+3$
④ $y=\frac{1}{2}x-3$ ⑤ $y=\frac{1}{2}x+3$

해설

두 직선이 수직일 조건은
기울기의 곱이 -1일 때이다.
$2x+y-1=0$에서 $y=-2x+1$
구하고자 하는 직선의 방정식을
$y=mx+3$이라면
$m\times(-2)=-1$, $\therefore\ m=\frac{1}{2}$
$\therefore\ y=\frac{1}{2}x+3$

4. 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

5. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x+1, y-2)$ 에 의하여 점$(3, 3)$ 은 어느 점에서 옮겨진 것인가?

① $(0, 0)$ ② $(3, 3)$ ③ $(1, -2)$

④ $(-1, 2)$ ⑤ $(2, 5)$

해설

평행이동 f는 x축의 방향으로 $+1$, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 변환이므로 $(a+1, b-2) = (3, 3)$ 따라서 $a = 2, b = 5$

6. 도형 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$ 를 x 축 방향으로 -2 만큼, y 축 방향으로 1 만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2+(y-1)^2=5$
② $(x-2)^2+(y+2)^2=5$
③ $(x-3)^2+(y+3)^2=5$
④ $(x-3)^2+(y-3)^2=5$
⑤ $(x+3)^2+(y-3)^2=5$

해설

$x-2=x' \quad y+1=y'$
라 하고 주어진 식에 대입한다.
$\Rightarrow \quad (x'+2+1)^2+(y'-1-2)^2=5$
$\Rightarrow \quad (x'+3)^2+(y'-3)^2=5$
$\Rightarrow \quad (x+3)^2+(y-3)^2=5$

7. 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(1,2)$, $\mathrm{P}(0,b)$, $\mathrm{Q}(a,0)$, $\mathrm{B}(5,1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값을 k라 할 때, k^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

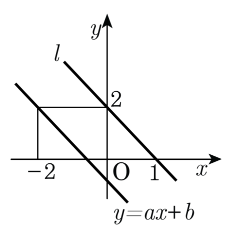
점 $\mathrm{A}(1,2)$의 y축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{A'}(-1,2)$, 점 $\mathrm{B}(5,1)$의 x축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{B'}(5,-1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$

$\geq \overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{(5+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{45}$

따라서 $k=\sqrt{45}$이므로 $k^2=45$

8. 다음 직선 l 과 평행하면서 점 $(-2,\ 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이때, $a + b$ 의 값은 ?



① -4　　② -3　　③ -2

④ -1　　⑤ 0

해설

그림의 직선의 기울기는 -2 이므로

구하는 직선은 기울기가 -2 이고 점 $(-2,\ 2)$ 를 지난다.

$y - 2 = -2(x + 2),\ y = -2x - 2$

$y = -2x - 2,\ a = -2, b = -2$ 이므로,

$\therefore\ a + b = -4$

9. 직선 $3x + ay = 3a$ $(a > 0)$ 의 그래프가 x 축, y 축과 만나서 이루어진 삼각형의 넓이가 3 일 때, a 의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

주어진 식의 양변을 $3a$ 로 나누면 $\frac{x}{a} + \frac{y}{3} = 1$

$\therefore$ x 절편이 a , y 절편이 3 이므로

$\mathrm{S} = \frac{1}{2} \times a \times 3 = 3$

$\therefore$ $a = 2$

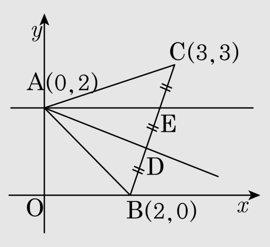
10. 점 A$(0,2)$, B$(2,0)$, C$(3,3)$ 으로 이루어진 삼각형ABC 가 있다. $\triangle$ABC 가 직선 $(k+1)x+(k-1)y=2(k-1)$ 에 의해 두 개의 도형으로 나누어지며, 한 쪽의 넓이가 다른 쪽 넓이의 두 배가 될 때의 k 값을 구하여라. (단, k 는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$k(x+y-2)+x-y+2=0$ 은 k 에 관계없이
A$(0,2)$ 를 지나는 직선이므로
$\triangle$ABC 를 그림과 같이
2 개의 삼각형으로 나누게 된다



따라서 $\overline{BC}$ 를 $1:2$ 또는 $2:1$ 로 내분하는
점D, E 를 지나게 된다.

D$\left(\frac{7}{3},1\right)$, E$\left(\frac{8}{3},2\right)$ 이므로

(i) D 를 지날 때,

$k\left(\frac{7}{3}+1-2\right)+\frac{7}{3}-1+2=0$

$k=-\frac{5}{2}$ 이므로 부적합 ($\because$ k 는 정수)

(ii) E 를 지날 때,

$k\left(\frac{8}{3}+2-2\right)+\frac{8}{3}-2+2=0$

$\therefore\ k=-1$

11. $2x+(a+3)y-1=0$, $(a-2)x+ay+2=0$에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 하나도 없도록 하는 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

두 직선 $2x+(a+3)y-1=0$,
$(a-2)x+ay+2=0$이 평행해야 하므로
$\dfrac{2}{a-2}=\dfrac{a+3}{a}\neq\dfrac{-1}{2}$
$(a-2)(a+3)=2a$, $(a+2)(a-3)=0$
$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=3$
그런데 $\dfrac{a+3}{a}\neq\dfrac{-1}{2}$에서 $a\neq-2$이므로
구하는 a의 값은 3이다.

12. 점 $(3, 4)$ 에서 직선 $2x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=3$

해설

$\frac{|2\times3-4+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ 이므로 $|2+k|=5$ 이다.

따라서 $k=3$ ($\because$ k 는 양수)

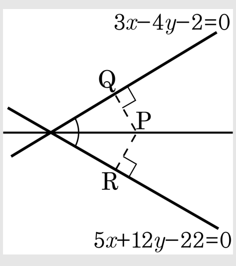
13. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a는 양수, a, b, c는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$\dfrac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$

$13(3X-4Y-2)=\pm 5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

14. 직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 만나지 않을 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$　② $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$
③ $-2 < m < 2$　④ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$
⑤ $-4 < m < 4$

해설

직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과
서로 만나지 않으므로, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서
직선까지의 거리가 반지름의 길이 1보다 커야 한다.

$$\frac{5}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} > 1$$

$\therefore \sqrt{m^2 + 1} < 5$ 양변을 제곱하여 정리하면
$m^2 + 1 - 25 < 0,\quad m^2 - 24 < 0$
$(m - 2\sqrt{6})(m + 2\sqrt{6}) < 0$
$\therefore -2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

15. 정점 A(3, 2)와 직선 $3x-4y-11=0$ 위의 점을 잇는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x-4y-6=0$　　② $3x+4y-6=0$
③ $4x-3y-6=0$　　④ $3x-4y+6=0$
⑤ $3x+4y+6=0$

해설

직선 $3x-4y-11=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{Q}(a, b)$ 라고 하면
$3a-4b-11=0$ ⋯ ①
$\overline{\mathrm{AQ}}$ 의 중점을 $\mathrm{P}(x, y)$ 라고 하면
$x=\dfrac{3+a}{2}$, $y=\dfrac{2+b}{2}$
$\therefore\ a=2x-3,\ b=2y-2$ ⋯ ②
②를 ①에 대입하면
$3(2x-3)-4(2y-2)-11=0$
$\therefore\ 3x-4y-6=0$

16. 두 점 A$(-1, 3)$, B$(2, a)$를
지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접할 때, a의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

두 점 A$(-1, 3)$, B$(2, a)$ 를

지나는 직선의 방정식은, $y - 3 = \frac{a-3}{3}(x+1)$

$\therefore\ (a-3)x - 3y + a + 6 = 0 \ \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접하므로

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 ㉠에 이르는 거리가

원의 반지름의 길이인 1 과 같다.

$\therefore\ \frac{|a+6|}{\sqrt{(a-3)^2+9}} = 1$

$\therefore\ |a+6| = \sqrt{(a-3)^2+9} \ \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변을 제곱하면 $a^2+12a+36 = a^2-6a+9+9$,$18a = -18$

$\therefore\ a = -1$

17. 점 $(-3,\ 1)$ 에서 원 $x^2+y^2=5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 양인 직선의 방정식을 구하면?

① $2x+y-5=0$ ② $2x-y-5=0$ ③ $x-2y+5=0$

④ $x-2y-5=0$ ⑤ $x+2y-5=0$

해설

접선의 기울기를 m이라고 하면 $(-3,1)$을 지나므로

$y=m(x+3)+1,\quad mx-y+3m+1=0$

접선이므로 원의 중심과 직선사이의 거리가 반지름과 같다.

$$\frac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$$

$2m^2+3m-2=0$

$m=\frac{1}{2},\ -2$

$m>0$이므로 $m=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

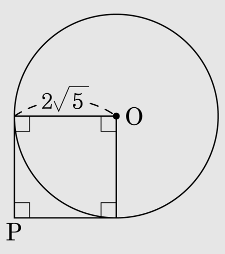
18. 원 $(x+1)^2+(y-6)^2=20$ 밖의 한 점 P에서 그은 접선이 수직으로 만날 때, 다음 중 점 P가 될 수 없는 점을 고르면?

① $(-7,\ 8)$　　② $(-3,\ 12)$　　③ $(1,\ 0)$

④ $(3,\ 1)$　　⑤ $(5,\ 4)$

해설

점 P에서 그은 접선이 수직으로 만나려면 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 정사각형이 되어야 한다.
이 때 점 P와 중심사이의 거리는 정사각형의 대각선 길이인 $2\sqrt{10}$ 이어야 한다. 원의 중심 $(-1,\ 6)$과 보기에 나와 있는 점들 사이의 거리를 구했을 때, 중심과 점 $(3,\ 1)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(3-(-1))^2+(1-6)^2}=\sqrt{41}$



19. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+(y-2)^2=4$ 의 공통접선의 방정식을 $y=ax+b$ 라고 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

원의 중심에서 직선 $y=ax+b$ 까지의
거리가 반지름과 같으면 되므로

$\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1 \Longleftrightarrow b^2=a^2+1\cdots$①

$\dfrac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1}}=2 \Longleftrightarrow (b-2)^2=4(a^2+1)\cdots$②

①, ② 에서 $b^2\geq 1$ 임을 유의하면
$b=-2,\ a^2=3$
따라서 $a^2+b^2=7$

해설

중심 $\mathrm{C}_1(0,0)$ 과 직선 $ax-y+b=0$

사이의 거리는 $\dfrac{|a\cdot 0-1\cdot 0+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}$

반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}=1$, $|b|=\sqrt{a^2+1}$

$\therefore\ b^2=a^2+1\cdots\cdots$①
중심 $\mathrm{C}_2\ (0,2)$ 와 직선 $ax-y+b=0$
사이의 거리는

$\dfrac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1=2}}$, $|b-2|=2\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면
$b^2-4b=4a^2\quad\cdots\cdots$㉡
㉠ $\times 4-$ ㉡ 에서
$3b^2+4b-4=0$, $(3b-2)(b+2)=0$

$\therefore\ b=\dfrac{2}{3},\ -2$

이 때 $b^2=a^2+1\geq 1$ 에서 $b=-2$
이것을 ㉠에 대입하면 $a^2=3$
$\therefore a^2+b^2=3+4=7$

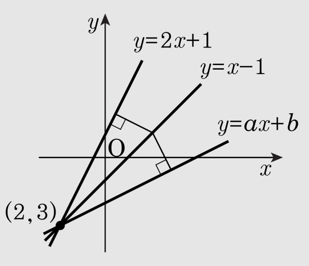
20. 직선 $y = 2x+1$ 을 직선 $y = x-1$ 에 대하여 대칭이동 시킬 때, 이동된 도형의 방정식을 구하면?

① $x-2y-3=0$　　② $x-2y-4=0$

③ $2x-3y+3=0$　　④ $2x-3y+4=0$

⑤ $2x-3y+5=0$

해설



i) 먼저 $y = 2x+1$ 과$y = x-1$ 의 교점을 구하면 $(2, 3)$ 이다.
그리고 이점은 $y = ax+b$ 를 지난다.
$\therefore 3 = 2a+b$
ii) 그리고 $y = x-1$ 의 임의의 점에서
$y = 2x+1$, $y = ax+b$ 에 이르는 거리는 같다.
$y = ax+b$ 와의 거리 :
$\dfrac{|a+0+b|}{\sqrt{a^2+1}}$
$\Rightarrow \quad \dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{|a+b|}{\sqrt{a^2+1}}$
i) 에서 구한
$2a+b=3$ 을 이용하여 연립하면
$a=2$, $b=1$ 또는 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-2$
$\therefore \quad y = \dfrac{1}{2}x-2$
($\because$ $y=2x+1$ 는 두 직선이 일치)