1. 다음 연립방정식의 해를 구하면?

$$\begin{cases} 0.6x+0.5y=2.8 & \cdots ㉠ \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

① $(2,3)$ ② $(-2,3)$ ③ $(3,2)$

④ $(3,-2)$ ⑤ $(-3,-2)$

해설

㉠, ㉡의 양변에 각각 10, 6을 곱하면

$$\begin{cases} 6x+5y=28 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2x+3y=12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉢ − ㉣×3을 하면 $-4y=-8$

$\therefore\ y=2$를 ㉣에 대입하면 $x=3$

$\therefore\ x=3,\ y=2$

2. 연립방정식 $ax+by=8,\ 2ax-by=-2$ 의 근이 $x=1,\ y=2$ 일 때, $a,\ b$ 의 값은?

① $a=-2,\ b=-3$　② $a=3,\ b=2$

③ $a=2,\ b=-3$　④ $a=2,\ b=3$

⑤ $a=-3,\ b=-2$

해설

$ax+by=8$, $2ax-by=-2$
근이 $x=1, y=2$ 이므로

$$\begin{cases} a+2b=8 \\ 2a-2b=-2 \end{cases}$$

$\therefore\ a=2, b=3$

3. 연립방정식

$$\begin{cases} 2x+ay=10 \\ x-y=b \end{cases}$$

의 해가 $x=2,\ y=-3$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$x=2,\ y=-3$을
두 방정식
$2x+ay=10,\ x-y=b$에 대입하면
모두 성립시키므로 $4-3a=10$
$\therefore\ a=-2$
$2-(-3)=b$
$\therefore\ b=5$
$\therefore\ a+b=3$

4. 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

2	1	−1	1	−6
		2	2	6
	1	1	3	0

위의 조립제법에서 $f(x) = (x-2)(x^2 + x + 3)$ 이므로 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2 + x + 3) = 0$

$\therefore x = 2 , x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$

두 허근의 합은 -1

5. $x^4-5x^2-14=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 4　② −4　③ 8　④ −8　⑤ −16

해설

$x^4-5x^2-14=(x^2+2)(x^2-7)=0$이므로

두 허근 α, β는

각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로

$\alpha^2+\beta^2=-2-2=-4$

6. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 $-3,\ 1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여
$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$
$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$
$\therefore\ a+b=-10$

7. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3+\overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3=1,\ \overline{\omega}^3=1,\ \omega^3+\overline{\omega}^3=2$

8. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax-y=a \\ x-ay=1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a=-1$　② $a=1$

③ $a=\pm 1$　④ $a \neq \pm 1$인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a의 값은 $a \neq \pm 1$인 모든 실수이다.

9. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

10. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+2y^2=12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2-3xy+2y^2=0$에서

$(x-y)(x-2y)=0 \quad \therefore x=y$ 또는 $x=2y$

i) $x=y$ 일 때

$x^2+2y^2=3x^2=12$

$x=\pm 2,\ y=\pm 2$

ii) $x=2y$일 때

$x^2+2y^2=6y^2=12$

$y=\pm\sqrt{2},\quad x=\pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x+y=4,-4,3\sqrt{2},-3\sqrt{2}$

11. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

$(x-y)(x-2y)$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = y$ 또는 $x = 2y$

ⅰ) $x = y$

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$

ⅱ) $x = 2y$

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

12. 방정식 $(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 의 모든 실근의 합은?

① -10 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 10

해설

$(x^2+x)^2+2(x^2+x+1)-10=0$ 에서
$x^2+x=A$ 라 하면
$A^2+2A-8=0$,
$(A+4)(A-2)=0$
$\therefore\ A=-4$ 또는 $A=2$
(i) $x^2+x=-4$ 일 때,
$x^2+x+4=0$
$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$
(ii) $x^2+x=2$ 일 때,
$x^2+x-2=0$,
$(x+2)(x-1)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$
(i), (ii)에서 실근은 $x=-2$ 또는 $x=1$ 이므로 실근의 합은
$-2+1=-1$

13. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 20 %증가하였고, B제품은 25 %증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답: 개

▷ 정답: 40개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

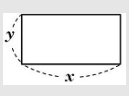
14. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5$ ……㉠
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17$ ……㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17$, $2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$ 을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$

15. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ 을 풀면?

① $x=18,\ y=-1$ 또는 $x=2,\ y=3$

② $x=-2,\ y=-3$ 또는 $x=2,\ y=3$

③ $x=\frac{18}{5},\ y=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=2,\ y=3$

④ $x=\frac{18}{5},\ y=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=-2,\ y=-3$

⑤ $x=-\frac{18}{5},\ y=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=-2,\ y=-3$

해설

$\begin{cases} 2x+y=7 \cdots ㉠ \\ x^2+Y^2=3 \cdots ㉡ \end{cases}$

$y=-2x+7$를 ㉡식에 대입

$x^2+(2x-7)^2=13$

$5x^2-28x+36=(5x-18)(x-2)=0$

$\begin{cases} x=\frac{18}{5},\ y=-\frac{1}{5} \\ x=2,\ y=3 \end{cases}$

16. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x^2+2xy-3y^2=-4 \end{cases}$ 의 해를 $x=a,\ y=b$라 할 때, 다음 중 a 또는 b의 값이 될 수 없는 것은?

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ -1

해설

$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 & \cdots ① \\ x^2+2xy-3y^2=-4 & \cdots ② \end{cases}$

①에서 $(x+y)(x+2y)=0$,

$x=-y, x=-2y$

i) $x=-y$를 ②에 대입 $y^2=1$

$\therefore\ y=\pm1, x=\pm1$(복호동순)

ii) $x=-2y$를 ②에 대입 $y^2=\frac{4}{3}$

$\therefore\ y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, x=\mp\frac{4\sqrt{3}}{3}$(복호동순)

그러므로 $x,\ y$값이 될 수 없는 것은

② $\frac{1}{3}$

17. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서
$(x+1)^2+(y-2)^2=0$
$x,\ y$ 는 실수이므로 $x=-1,\ y=2$
$\therefore\ x+y=-1+2=1$

18. 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 근이 유리수가 되는 k 의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식D ≥ 0 이어야 한다.

$D=25-8k \geq 0$ 곧, $k \leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k=3,\ 2,\ 1,\ \cdots$ 이고,

이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k=3$ 이다.

19. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a는 -10 이상 -2 이하이다.

② a는 -2 이상 6 이하이다.

③ a는 6 이상이다.

④ a는 0 이하이다.

⑤ a는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)
$\alpha + \beta = a$, $\alpha\beta = a + 2$
이 두 식에서 a를 소거하면
$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2$, $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$
$\alpha - 1, \beta - 1$이 정수이므로
$\therefore\ \alpha = 2,\ \beta = 4$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = 0$
$\therefore\ a = 6,\ -2$

20. 사차방정식 $x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$을 만족하는 실수 x에 대하여 $x + \frac{1}{x} = a$라 하자. 이 때, a가 될 수 있는 모든 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$의 양변을
x^2으로 나누면

$$x^2 - x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = a$로 치환하면

$x^2 - a - 6 = 0$, $(a - 3)(a + 2) = 0$

$\therefore\ a = 3$ 또는 $a = -2$

따라서, 모든 A의 값의 합은 $3 + (-2) = 1$

21. $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근을 α,β,γ라 한다. $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$일 때, abc의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0$의
세 근이 α,β,γ이므로
$\alpha+\beta+\gamma=-2$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$,
$\alpha\beta\gamma=-1$
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-3$,
$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2$,
$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$
따라서 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
$x^3+3x^2+2x+1=0$
$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c=0$
$\therefore a=3,b=2,c=1$

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0\cdots\cdots$ ①
$x=\frac{1}{X}$로 놓으면
$\left(\frac{1}{X}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{X}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{X}\right)+1=0$
$\therefore\ X^3+3X^2+2X+1=0\cdots\cdots$ ②
①의 세 근이 α,β,γ이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$이다.
∴구하는 방정식은
$X^3+3X^2+2X+1=0$에서
$abc=3\cdot2\cdot1=6$

22. $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $y=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $x^5+y^5=1$　② $x^7+y^7=1$　③ $x^9+y^9=1$

④ $x^{11}+y^{11}=1$　⑤ $x^{13}+y^{13}=1$

해설

$x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 는 $x^2-x+1=0$ 의 근이다

$\therefore\ x^2-x+1=0 \Rightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0 \Rightarrow x^3+1=0$

$\therefore\ x^3=y^3=-1,\ x+y=1,\ xy=1$

① : $x^5+y^5 = x^3\times x^2+y^3\times y^2 = -(x^2+y^2) =$
$-\{(x+y)^2-2xy\}=1$

② : $x^7+y^7=(x^3)^2x+(y^3)^2y=x+y=1$

③ : $x^9+y^9=(x^3)^3+(y^3)^3=-2$

④ : $x^{11}+y^{11}=(x^3)x^2+(y^3)^3y^2=-(x^2+y^2)=1$

⑤ : $x^{13}+y^{13}=(x^3)^4x+(y^3)^4y=x+y=1$

23. 두 이차방정식 $x^2+kx+3=0$, $x^2+x+3k=0$이 공통인 실근 α를 가질 때, $\alpha-k$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

공통근이 α이므로

$\alpha^2+k\alpha+3=0$ ……㉠

$\alpha^2+\alpha+3k=0$ ……㉡

㉠ − ㉡에서 $(k-1)\alpha-3(k-1)=0$,

$(k-1)(\alpha-3)=0$

(i) $k=1$인 경우 두 이차방정식이 $x^2+x+3=0$으로 일치하여 공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.

(ii) $\alpha=3$인 경우 $9+3k+3=0$ $\therefore\ k=-4$

$\therefore\ \alpha-k=7$

24. 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{21}$ (단, $x<y$)을 만족하는 양의 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)에 대하여 $x+y$의 최댓값을 구하면?

① 484 ② 192 ③ 112 ④ 100 ⑤ 548

해설

$21(x+y)=xy, \quad xy-21(x+y)=0$
$\therefore \ (x-21)(y-21)=21^2=3^2\times 7^2$
$21x=(x-21)y$이고 $y>x>0$이므로
$y-21>x-21>0$
$\therefore (x-21,\ y-21)$
$=(1,\ 441), (3,\ 147), (7,\ 63), (9,\ 49)$
$\therefore (x,\ y)$
$=(22,\ 462), (24,\ 168), (28,\ 84), (30,\ 70)$
$\therefore \ x+y$의 최댓값은 $22+462=484$

25. 대학수학능력시험 수리탐구 영역(Ⅰ)의 문항 수는 30개이고 배점은 40점이다. 문항별 배점은 1점, 1.5점, 2점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

1점짜리 문항을 x개,
1.5점짜리 문항을 y개,
2점짜리 문항을 z개라고 하면
$x+1.5y+2z=40\cdots$㉠
$x+y+z=30\cdots$㉡
$(x\geq 1,\ y\geq 1,\ z\geq 1)$라고 하면
㉠$\times 2-$㉡$\times 3=-x+z=-10$,
$x=z+10,\ z\geq 1$이므로
$x=z+10\geq 11$
이 때 $y=18$이고 준 조건을 만족하므로
x의 최솟값은 11