1. $x^2 - 5x + 6 = 0$의 근을 근의 공식을 이용하여 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 6}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$

2. x에 대한 이차방정식 $kx^2 - x - (k+7) = 0$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하면?(단 k는 상수)

① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

방정식에 $x = 2$를 대입하면

$k \cdot 2^2 - 2 - (k+7) = 0$

$4k - 2 - k - 7 = 0$, $3k = 9$,

$\therefore\ k = 3$

$3x^2 - x - 10 = 0$, $(3x+5)(x-2) = 0$

$\therefore\ x = 2, -\frac{5}{3}$

3. 이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$ 이 중근을 가질 때, 실수 k 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 36

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \cdot k = 0$

$\therefore\ k = 9$

4. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라고 할 때 $|\alpha-\beta|$는 다음 중 어느 것과 같은가 ?

① $\dfrac{\sqrt{D}}{a}$ ② $\dfrac{-\sqrt{D}}{a}$ ③ $\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$
④ $-\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$ ⑤ $-\dfrac{D}{|a|}$

해설

근의 공식을 이용하여 풀면

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

즉 $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ (단, $D=b^2-4ac$)

$$\therefore |\alpha-\beta| = \left|\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right|$$
$$= \left|\frac{-b+\sqrt{D}+b+\sqrt{D}}{2a}\right|$$
$$= \left|\frac{2\sqrt{D}}{2a}\right| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

5. 이차방정식 $2x^2-4x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값은?

① 1　② 3　③ 4　④ 8　⑤ 11

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\ &= 8-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2=11\end{aligned}$$

6. 방정식 $|x| + |x-1| = 2$의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

i) $x < 0$일 때,
$-x-(x-1) = 2$이므로 $-2x+1 = 2$
$\therefore\ x = -\frac{1}{2}$
ii) $0 \le x < 1$일 때,
$x-(x-1) = 2$이므로 $0 \cdot x = 1$
$\therefore$ 해가 없다.
iii) $1 \le x$일 때,
$x+x-1 = 2$이므로 $2x = 3$
$\therefore\ x = \frac{3}{2}$
(i), (ii), (iii) 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

7. x에 대한 이차방정식 $kx^2+(2k+1)x+6=0$의 해가 2, α일 때, $k+\alpha$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

해가 $2, \alpha$라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.

$k \cdot 2^2 + (2k+1)2 + 6 = 0$

$4k + 4k + 8 = 0$에서 $k = -1$

$k = -1$을 방정식에 대입하고 α를 구한다.

$-x^2 - x + 6 = 0$, $x^2 + x - 6 = 0$

$(x+3)(x-2) = 0$, $x = 2, -3$

$\therefore k = -1,\ \alpha = -3$

$\therefore\ k + \alpha = -4$

8. 이차방정식 $x^2+2x+2-a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a 의 범위를 구하면?

① $a<1$　② $a\geq 1$　③ $-1<a<1$
④ $a>1$　⑤ $a\geq -1$

해설

$x^2+2x+2-a=0$ 이
서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는
판별식 $D>0$ 이어야 한다.
$\frac{D}{4}=1-(2-a)>0$
$1-2+a>0$
$\therefore\ a>1$

9. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \le 3$ ② $k > 3$ ③ $k \le 2$ ④ $k > 2$ ⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D < 0$

$3x^2 - 6x + k = 0$

$\frac{D}{4} = 9 - 3k < 0$

$\therefore\ k > 3$

10. 이차식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4=0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\frac{D}{4}=(k-1)^2-(2k^2-6k+4)=0$
위의 식을 정리하면
$-k^2+4k-3=0$
$k^2-4k+3=0$
$(k-1)(k-3)=0$에서
$k=1$ 또는 $k=3$

11. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$
② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$
③ $(x+3)(2x-1)$
④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$
⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a = 2, b' = -2, c = 3$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

12. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $1-i$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설

다른 한 근은 복소수의 켤레근인 $1+i$ 이므로
두 근의 합 : $(1+i)+(1-i)=-a \quad \therefore a=-2$
두 근의 곱 : $(1+i)(1-i)=b \quad \therefore b=2$
$\therefore a+b=-2+2=0$

13. 방정식 $(a^2-3)x-1 = a(2x+1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 3

해설

$(a^2-2a-3)x = a+1$

$(a-3)(a+1)x = a+1$

$\therefore a = 3$ 이면 해가 없다.

14. 이차방정식 $|x^2-5|=4x$의 모든 근의 합은?

① 5 ② 0 ③ 6 ④ 10 ⑤ 12

해설

i) $x^2-5 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt{5}$ 또는 $x \geq \sqrt{5}$ $\cdots$ ㉠

$x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$

$x=-1$ 또는 5

$\Rightarrow \quad x=5$ ($\because$ ㉠)

ii) $x^2-5<0 \Rightarrow -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ $\cdots$ ㉡

$x^2+4x-5=0$

$(x-1)(x+5)=0$

$x=1$ 또는 -5

$\Rightarrow \quad x=1$ ($\because$ ㉡)

$\therefore$ 근의 합 : 6

15. 다음 방정식을 풀면?

$$(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)x+2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}$
② $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$
③ $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$
④ $x=1$ 또는 $x=-\sqrt{3}+1$
⑤ $x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

해설

x^2 의 계수를 유리수로 만들기 위해 양변에 $\sqrt{3}+1$을 곱하면
$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)^2x+2(\sqrt{3}+1)=0$
$2x^2-2(2+\sqrt{3})x+2(\sqrt{3}+1)=0$
$x^2-(2+\sqrt{3})x+(\sqrt{3}+1)=0$
$(x-1)\left\{x-(\sqrt{3}+1)\right\}=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

16. 방정식 $x^2 + |x| = |x-1| + 5$를 만족하는 두 근의 곱은?

① $-2\sqrt{6}$　　② $-\sqrt{6}$　　③ 0

④ $\sqrt{6}$　　⑤ $2\sqrt{6}$

해설

ⅰ) $x < 0$일 때

$x^2 - x = -(x-1) + 5,\ x^2 = 6$

$\therefore x = \pm\sqrt{6}$

그런데 $x < 0$이므로 $x = -\sqrt{6}$

ⅱ) $0 \le x < 1$일 때

$x^2 + x = -(x-1) + 5$

$x^2 + 2x - 6 = 0$

$\therefore x = -1 \pm \sqrt{7}$

그런데 $0 \le x < 1$이므로 해가 없다.

ⅲ) $x \ge 1$일 때,

$x^2 + x = x - 1 + 5,\ x^2 = 4$

$\therefore x = \pm 2$

그런데 $x \ge 1$이므로 $x = 2$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 주어진 방정식의 해는

$x = 2$ 또는 $x = -\sqrt{6}$이므로

두 근의 곱은 $-2\sqrt{6}$

17. $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다. $0 \le x < 2$일 때, $4[x]x^2 - 4x - 1 = 0$의 해를 α라 하면 2α의 값은?

① $\sqrt{2} - 1$　　② $\sqrt{2} + 1$　　③ $\sqrt{3} + 2$

④ $\sqrt{3} - 1$　　⑤ $\sqrt{3} - 2$

해설

(i) $0 \le x < 1$일 때, $[x] = 0$이므로

$-4x - 1 = 0$

$\therefore\ x = -\frac{1}{4}$(부적합)

(ii) $1 \le x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로

$4x^2 - 4x - 1 = 0$

$\therefore\ x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

$1 \le x < 2$이므로 $x = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

$\therefore\ 2\alpha = \sqrt{2} + 1$

18. $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2 - 2x + 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = 3$

$(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$

$= \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta$

$= (\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta$

$= 9 - 6 \cdot 2 + 12 = 9$

19. 0 이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 모두 고른 것은?

보 기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$	㉡ $x^2 + bx + a = 0$
㉢ $ax^2 + x + b = 0$	㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉣　③ ㉡, ㉢　④ ㉡, ㉣　⑤ ㉢, ㉣

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0,\ D = a^2 - 4b$

$b \le \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2,\ a^2 \ge 4b^2$ 일 때만 실근 존재

20. $x^2 + 2\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\,x + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} = 0$의 근을 판별하면?
(단, a, b, c는 서로 다른 양의 실수이다.)

① 서로 다른 두 허근

② 서로 다른 두 실근

③ 서로 같은 두 실근

④ 서로 다른 두 허근

⑤ 한 근은 실근, 한 근은 허근

해설

$$\frac{D}{4} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\right\} > 0$$

따라서 서로 두 실근을 갖는다.
(단, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ 일 때 중근)

21. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$

$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$

$4a+4b=0,\quad a^2-2ab+b^2=0$

$\therefore a+b=0$

22. 이차방정식 $x^2-(k+1)x+k=0$의 두 근의 비가 $2:3$일 때, 상수 k의 값들의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

두 근을 2α, 3α라 하면
$2\alpha+3\alpha=k+1$, $(2\alpha)(3\alpha)=k$이므로,
$5\alpha=k+1$, $6\alpha^2=k$
이 두 식에서 α를 소거하면
$6\left(\frac{k+1}{5}\right)^2=k$에서 $6k^2-13k+6=0$
$(2k-3)(3k-2)=0$ ∴ $k=\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$

23. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합은?

① -1　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ 2

해설

$f(x)=0$의 두 근을 a, b라 하면 $a+b=3$

$2x+1=t$라 하면 $x=\frac{t-1}{2}$

$f(2x+1)=f(t)=0$에서

$f(t)=0$의 해가 $t=a,\ t=b$이므로

$f(2x+1)=0$의 해는 $x=\frac{a-1}{2}, \frac{b-1}{2}$ 이다.

$\therefore \frac{a-1}{2}+\frac{b-1}{2}=\frac{a+b-2}{2}=\frac{1}{2}$

24. 서현이와 주현이가 이차방정식 $x^2+ax+b=0$을 함께 풀었다. 그런데 서현이는 a를 잘못 보고 풀어서 두 근 1, 3을 얻었고, 주현이는 b를 잘못 보고 풀어서 두 근 -1, -4를 얻었다. 이 때, 처음 이차방정식은?

① $x^2-5x+3=0$ ② $x^2+5x+3=0$
③ $x^2+5x+13=0$ ④ $x^2+5x-13=0$
⑤ $x^2+5x+15=0$

해설

서현이가 잘못 본 일차항의 계수 a를 a',
주현이가 잘못 본 상수항 b를 b' 이라 하자.
$x^2+a'x+b=0$의 두 근이 1, 3이므로
$b=1\times 3=3$
$x^2+ax+b'=0$의 두 근이 -1, -4이므로
$-a=(-1)+(-4)=-5$
$\therefore\ a=5$
따라서 처음의 이차방정식은 $x^2+5x+3=0$

25. 다음 x의 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 다르게 실수 m의 값을 정하면?

$$3(x-1)(x-m)-x(7-m^2)=18-m^2$$

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

두 근의 절댓값이 같고 부호가 다를 조건은
$\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta<0$
준식을 x에 관해서 정리하면,
$3x^2+(m^2-3m-10)x+m^2+3m-18=0$
따라서, $\alpha+\beta=\dfrac{-(m^2-3m-10)}{3}=0,$
즉 $m^2-3m-10=0$
$(m-5)(m+2)=0\quad\therefore\ m=5,\ -2\quad\cdots\cdots$ ㉠
$\alpha\beta=\dfrac{m^2+3m-18}{3}<0,\ m^2+3m-18<0$
$(m-3)(m+6)<0\quad\therefore\ -6<m<3\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통범위에 의해 $m=-2$