1. 이차방정식 $x^2 + (k-4)x + k - 1 = 0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D = 0$ 일 때 중근을 가지므로
$D = (k-4)^2 - 4(k-1) = k^2 - 12k + 20 = 0$ 에서
$(k-2)(k-10) = 0$
따라서, $k = 2,\ k = 10$ 이므로 k 의 값은 12 이다.

2. x에 대한 이차방정식$(m-1)x^2-2mx+(m+2)=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값과 그 때의 중근을 α라 할 때, $m+\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x의 계수가 $2m$이므로

$\frac{D}{4}=m^2-(m-1)(m+2)=0$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore\ m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$x^2-4x+4=0,\ (x-2)^2=0$

$\therefore\ x=2$ (중근 α)

$\therefore m+\alpha=2+2=4$

3. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \le 3$ ② $k > 3$ ③ $k \le 2$ ④ $k > 2$ ⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D < 0$

$3x^2 - 6x + k = 0$

$\frac{D}{4} = 9 - 3k < 0$

$\therefore\ k > 3$

4. 이차방정식 $x^2 - x(kx - 7) + 3 = 0$이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8　② -4　③ -2　④ 5　⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx - 7) + 3 = 0$
$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$
$(1 - k)x^2 + 7x + 3 = 0$
(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로
x^2 의 계수는 $1 - k \neq 0$ 이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$
(ii) 주어진 이차방정식이
허근을 갖기 위해서는
판별식 $D < 0$이어야 하므로
$D = 7^2 - 4 \cdot (1 - k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$
$37 + 12k < 0$
$\therefore k < -\frac{37}{12}$
따라서 최대정수는 -4이다.

5. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

6. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한<보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k = 1$ 이면 중근을 갖는다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0 < k < 1$이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$

㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>

㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 중근을 갖는다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉣ $0 < k < 1$이면 $-1 < -1 + k < 0$이므로 $\sqrt{-1+k} = ai(a \neq 1)$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.

7. 다음 이차방정식을 풀면?

$$(1-i)x^2+(1+i)x-2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-i$ ② $x=-1$ 또는 $x=-1-i$

③ $x=-1$ 또는 $x=-1+i$ ④ $x=1$ 또는 $x=-1-i$

⑤ $x=1$ 또는 $x=-1+i$

해설

x^2 의 계수를 실수로 만들기 위해 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)^2x-2(1+i)=0$

$2x^2+2ix-2(1+i)=0$

$(x-1)\left\{x+(1+i)\right\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1-i$

8. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때

$x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$

$x = -1$ 또는 $x = 3$

그런데 $x \geq 0$이므로 $x = 3$

ⅱ) $x < 0$일 때

$x^2 + 2x - 3 = 0$, $(x-1)(x+3) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = -3$

그런데 $x < 0$이므로 $x = -3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$

따라서 근의 합은 0이다.

9. 이차방정식 $x^2-4|x|-5=0$의 두 근의 곱은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때,
$x^2-4x-5=(x-5)(x+1)=0$
$\therefore x=5$
ⅱ) $x<0$일 때,
$x^2+4x-5=(x+5)(x-1)=0$
$\therefore x=-5$
ⅰ), ⅱ)에서 두 근의 곱은 -25이다.

10. $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + 2bx + 3a = 0$를 동시에 만족하는 x는 -1밖에 없을 때, 상수 ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$x = -1$은 두 이차방정식 $x^2 + ax = b = 0$,
$x^2 + 2bx + 3a = 0$의 공통근이므로
$1 - a + b = 0,\ 1 - 2b + 3a = 0$
두 식을 연립하여 풀면
$a = -3,\ b = -4$
$\therefore ab = 12$

11. 0 이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 <u>모두</u> 고른 것은?

보 기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$　　㉡ $x^2 + bx + a = 0$

㉢ $ax^2 + x + b = 0$　　㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉣　③ ㉡, ㉢　④ ㉡, ㉣　⑤ ㉢, ㉣

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0,\ D = a^2 - 4b$

$b \le \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2,\ a^2 \ge 4b^2$ 일 때만 실근 존재

12. 이차방정식 $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$이 중근을 가질 조건을 구하면?(단, $a \neq b$)

① $a=b+c$　② $2a=b+c$　③ $a=b-c$
④ $2a=b-c$　⑤ $2a=2b-c$

해설

$D=(b-c)^2-4(a-b)(c-a)$
$=b^2+c^2-2bc-4(ac-a^2-bc+ab)$
$=4a^2+b^2+c^2-4ac+2bc-4ab$
$=(2a-b-c)^2$
준식이 중근을 가져야 하므로
$D=0$이어야 한다.
따라서, $(2a-b-c)^2=0,\ \ 2a-b-c=0$
$\therefore 2a=b+c$

13. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x + y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 0$

$\therefore\ x = 2,\ y = 4$

$\therefore\ x + y = 6$

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$이 실근을 가지므로

$D/4 = 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0$

$y^2 - 8y + 16 \leq 0$

$(y - 4)^2 \leq 0,\ y = 4$

준식에 대입하면 $x = 2$

따라서 $x + y = 6$

14. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ax^2+2bx+c=0$	㉡ $ax^2+\frac{1}{2}bx+c=0$
㉢ $cx^2+bx+a=0$	

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$D=b^2-4ac>0\cdots$
㉠ $ax^2+2bx+c=0$의 판별식은
$D=(2b)^2-4ac=4b^2-4ac$
$=3b^2+(b^2-4ac>0)$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
㉡ [반례] $a=1,\ b=3,\ c=2$일 때
$x^2+3x+2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지만
$x^2+\frac{3}{2}x+2=0$은 허근을 갖는다.
㉢ $cx^2+bx+a=0$의 판별식은
$D=b^2-4ac>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

15. x에 관한 이차방정식 $x^2-2(m-a+1)x+m^2+a^2-2b=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 a, b의 값을 정하면?

① $a=-1,\ b=\frac{1}{2}$
② $a=1,\ b=\frac{1}{2}$
③ $a=-1,\ b=-\frac{1}{2}$
④ $a=1,\ b=-\frac{1}{2}$
⑤ $a=1,\ b=-1$

해설

$\frac{D}{4}=0$이므로

$(m-a+1)^2-(m^2+a^2-2b)=0$,

m에 관하여 정리하면

$2(-a+1)m-2a+2b+1=0$

m에 관계없이 성립하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+2b+1=0$

$\therefore\ a=1,\ b=\frac{1}{2}$

16. x에 대한 이차식 $a\left(1-x^2\right)-2bx+c(1+x^2)$이 완전제곱식일 때, a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① a를 빗변으로 하는 직각삼각형

② b를 빗변으로 하는 직각삼각형

③ c를 빗변으로 하는 직각삼각형

④ 예각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

$a\left(1-x^2\right)-2bx+c(1+x^2)$을 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(c-a)x^2-2bx+a+c$
위의 식이 완전제곱식이 되려면
$c-a \neq 0$이고, $\dfrac{D}{4}=0$이어야 한다.
$\dfrac{D}{4}=b^2-(c-a)(c+a)=0$
$b^2-(c^2-a^2)=0, \quad b^2-c^2+a^2=0$
$\therefore c^2=b^2+a^2$
따라서 c를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

17. 방정식 $\left\{1+(a+b)^2\right\}x^2-2(1-a-b)x+2=0$의 근이 실수일 때 a^3+b^3-3ab의 값을 구하면 ? (단, a, b는 실수)

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 0

해설

$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-\left\{1+(a+b)^2\right\}\cdot 2 \geq 0$

$-(a+b)^2-2(a+b)-1 \geq 0$

양변에 -1을 곱하면

$(a+b)^2+2(a+b)+1 \leq 0$

$\{(a+b)+1\}^2 \leq 0$

그런데 a, b가 실수이므로 $a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^3+b^3-3ab &= (a+b)^3-3ab(a+b)-3ab \\ &= (-1)^3-3ab(-1)-3ab \\ &= -1\end{aligned}$$

18. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2+2cx+a-b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a>0,\ b>0,\ c>0$
따라서, $a+b>0$이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$
$\dfrac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)=0$
정리하면, $c^2-a^2+b^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a가 빗변인 직각삼각형

19. 방정식 $|x^2 + (a-2)x - 2| = 1$ 의 모든 근의 합이 0 일 때 상수 a 의 값은?

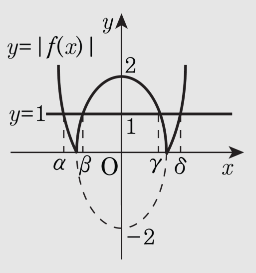
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$| x^2 + (a-2)x - 2 | = 1 \Leftrightarrow x^2 + (a-2)x - 2 = \pm 1$
$x^2 + (a-2)x - 2 = 1$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = -(a-2)$
… ㉠
$x^2 + (a-2)x - 2 = -1$ 의 두 근을 γ, δ라 하면 $\gamma + \delta = -(a-2)$
… ㉡
㉠+㉡하면 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -2(a-2)$
모든 근의 합이 0 이므로 $a - 2 = 0 \therefore a = 2$

해설

$f(x) = x^2 + (a-2)x - 2$ 라 놓으면 y 절편이 -2 이므로 방정식 $|f(x)| = 1$ 의 근을 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 할 때 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ 이기 위해서는$y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다. (우함수)



$\therefore\ a - 2 = 0,\ a = 2$

20. 방정식 $x^3-3x+1=0$의 한 근을 α, $x^2-\alpha x+1=0$의 한 근을 β라 할 때, $\beta^3+\frac{1}{\beta}^{3}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\alpha^3-3\alpha+1=0$에서 $\alpha^3-3\alpha=-1$
$\beta^2-\alpha\beta+1=0$에서 양변을 β로 나누면

$\beta+\frac{1}{\beta}=\alpha(\because \beta\neq 0)$

$$\begin{aligned}\therefore \beta^3+\frac{1}{\beta}^{3} &= \left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^3-3\beta\cdot\frac{1}{\beta}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)\\ &= \alpha^3-3\alpha=-1\end{aligned}$$