1. 이차방정식 $x^2+(k-4)x+k-1=0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D=0$ 일 때 중근을 가지므로
$D=(k-4)^2-4(k-1)=k^2-12k+20=0$ 에서
$(k-2)(k-10)=0$
따라서, $k=2$, $k=10$ 이므로 k 의 값은 12 이다.

2. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \leq 3$　② $k > 3$　③ $k \leq 2$　④ $k > 2$　⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D < 0$
$3x^2 - 6x + k = 0$
$\frac{D}{4} = 9 - 3k < 0$
$\therefore\ k > 3$

3. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k - a)x + k^2 + b - 3 = 0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a = 1, b = 2$　② $a = 0, b = 3$　③ $a = -1, b = 2$

④ $a = 0, b = 2$　⑤ $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.

$D' = (k - a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$

$\Rightarrow \quad -2ak + a^2 - b + 3 = 0$

모든 k 에 대해 성립하려면

$-2a = 0,\ a^2 - b + 3 = 0$

$\therefore \quad a = 0, b = 3$

4. 연산 $*$를 $a*b=ab+2(a+b)$라 정의할 때, 다음 방정식의 두 근을 α, β라 한다. 이때, $|\alpha-\beta|$의 값은?

$$\boxed{(3x*x)-(3*x)+\{(-1)*2\}=0}$$

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

연산 $*$ 의 정의에 따라서
$3x*x=3x\cdot x+2(3x+x)=3x^2+8x$, $3*x=3\cdot x+2(3+x)=5x+6$,
$-1*2=(-1)\cdot 2+2(-1+2)=-2+2=0$
주어진 식은 $3x^2+8x-(5x+6)+0=0$
$3x^2+3x-6=0$ 에서 $3(x+2)(x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ $\therefore$ $|\alpha-\beta|=3$

5. 이차방정식 $(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 해는 $x=a$ 또는 $x=p+qi$ 이다. 이 때, $a+p+q$의 값을 구하여라. (단, a, p, q는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)(-3+i)x+2(1+i)=0$

$2x^2-2(2+i)x+2(1+i)=0$

$x^2-(2+i)x+1+i=0$

$(x-1)\left\{x-(1+i)\right\}=0$

$x=1$ 또는 $x=1+i$

$\therefore a+p+q=3$

6. 이차방정식 $(\sqrt{2}-1)x^2-(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$의 두 근은?

① $\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$　② $-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$　③ $\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}$
④ $-\sqrt{2},\ -1-\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}$

해설

양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면
$x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$
$(x-\sqrt{2})\left\{x-(\sqrt{2}+1)\right\}=0$
$\therefore x=\sqrt{2},\ \sqrt{2}+1$

해설

$x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$로 고친 후 근의 공식을 이용하여 풀어도 좋다.

7. 이차방정식 $x^2+mx+m-1=0$의 한 근이 1일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

1이 $x^2+mx+m-1=0$의 근이므로
$x=1$을 대입하면 $1+m+m-1=0$ $\therefore m=0$
주어진 방정식은 $x^2-1=0$ $\therefore x=\pm1$
따라서 다른 한 근은 $x=-1$

8. x 에 대한 방정식 $ax^2+2x-a-2=0$ 의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

① 오직 한 실근을 갖는다.

② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 실근을 갖는다.

⑤ 허근을 갖는다.

해설

(ⅰ) $a=0$ 일 때 : $x=\dfrac{a+2}{2}$

(ⅱ) $a\neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$D'=1+a(a+2)=a^2+2a+1=(a+1)^2\geq 0$

∴ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

9. 양의 실수 $a,\ b$에 대하여 x에 대한 이차방정식 $ax^2+2(b+i)x+1+2i=0$의 두 근이 서로 같을 때, $a+b$의 값은?

① $1+\sqrt{5}$　　② $1-\sqrt{5}$　　③ $2+\sqrt{3}$
④ $2-\sqrt{3}$　　⑤ $1+\sqrt{3}$

해설

복소계수 이차방정식에서도 중근을 가질 조건은 $D=0$ 이다.
$ax^2+2(b+i)x+1+2i=0$ 에서
$\frac{D}{4}=(b+i)^2-a(1+2i)=0$
위의 식을 정리하면
$(b^2-1-a)+(2b-2a)i=0$ ⋯⋯㉠
$a,\ b$ 가 실수이므로 ㉠에서
$b^2-1-a=0$ ⋯⋯㉡
$2b-2a=0$ ⋯⋯㉢
㉢에서 $a=b$
$a=b$ 를 ㉡에 대입하면
$b^2-1-b=0$, $b^2-b-1=0$
$\therefore\ b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
그런데 $a,\ b$ 가 양의 실수이므로
$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$\therefore\ a+b=1+\sqrt{5}$

10. x에 대한 이차방정식 $x^2+bx=-(a^2-3bx+c^2)$이 중근을 가질 때, a, b, c를 세 변의 길이로 갖는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 둔각삼각형
② a가 빗변인 직각삼각형
③ b가 빗변인 직각삼각형
④ $a=b$인 이등변삼각형
⑤ $b=c$인 이등변삼각형

해설

주어진 식을 정리하면
$x^2-2bx+a^2+c^2=0$이
방정식이 중근을 가지므로
$\frac{D}{4}=(-b)^2-(a^2+c^2)=0$
$\therefore b^2=a^2+c^2$
따라서 b가 빗변인 직각삼각형이다.

11. 방정식 $x^2-4x+y^2-8y+20=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=(x-2)^2+(y-4)^2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=4$

$\therefore\ x+y=6$

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=0$이 실근을 가지므로

$D/4=4-(y^2-8y+20)\geq 0$

$y^2-8y+16\leq 0$

$(y-4)^2\leq 0,\ y=4$

준식에 대입하면 $x=2$

따라서 $x+y=6$

12. x에 대한 이차방정식 $(a+1)x^2-4x+2=0$에 대하여 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=1$일 때, 중근을 갖는다.

㉡ $a>1$일 때, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉢ $a<1$일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a \neq -1$일 때, 주어진 방정식은 이차방정식이다.
서로 다른 두 실근을 가질 때
$\frac{D}{4}=4-2(a+1)=2-2a>0$
$\therefore a<1$
따라서 $a<-1$ 또는 $-1<a<1$일 때,
서로 다른 두 실근을 갖는다.
중근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a=0$
$\therefore a=1$
따라서, $a=1$일 때, 중근을 갖는다.
서로 다른 두 허근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a<0$
$\therefore a>1$
따라서 $a>1$일 때 서로 다른 두 허근을 갖는다.

13. x에 관한 이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가질 때 $x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$의 근을 판별하면?

① 중근 ② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근 ④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가지려면
$D'=4+a-b=0$
$\therefore b=a+4$
$x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$
$x^2-2(a-1)x+a^2-2a+16=0$
$D'=(a-1)^2-(a^2-2a+16)=-15<0$
$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

14. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$ 이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=4+6k<0$

$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\quad\cdots\cdots$㉠

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$D=25+8k\geq 0$

$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}\quad\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

15. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $mx^2+2(a-b-m)x-a+m+1=0$이 m의 값에 관계없이 중근을 갖도록 하는 실수 $a,\ b$의 값은?

① $a=-1,\ b=0$　　② $a=-1,\ b=-1$

③ $a=0,\ b=1$　　④ $a=1,\ b=1$

⑤ $a=1,\ b=2$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 할 때,
$m \neq 0$이고, 중근을 가지려면
$D=0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=(a-b-m)^2-m(-a+m+1)$
$a^2+b^2-2ab+2bm-am-m=0$
이 때, 이 등식이 m의 값에 관계없이
항상 성립해야 하므로
m에 대하여 정리하면
$(2b-a-1)m+(a-b)^2=0$
$2b-a-1=0,\ (a-b)^2=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=1,\ b=1$

16. x의 이차식 $x^2+(3a+1)x+2a^2-b^2$이 완전제곱식이고, a, b가 정수일 때, 순서쌍 (a, b)의 갯수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

완전제곱식이 되려면 판별식이 0이다.

$D=(3a+1)^2-4(2a^2-b^2)=0$

$a^2+6a+1+4b^2=0$

$\Rightarrow \quad (a+3)^2+(2b)^2=8$

a, b가 정수이므로

$a+3=\pm 2, \quad 2b=\pm 2$

$\therefore \quad a=-1, \ -5, \quad b=1, -1$

가능한 순서쌍 (a, b)의 갯수 : 4개

17. 방정식 $\left\{1+(a+b)^2\right\}x^2-2(1-a-b)x+2=0$의 근이 실수일 때 a^3+b^3-3ab의 값을 구하면 ? (단, a, b는 실수)

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 0

해설

$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-\left\{1+(a+b)^2\right\}\cdot 2\geq 0$

$-(a+b)^2-2(a+b)-1\geq 0$

양변에 -1을 곱하면

$(a+b)^2+2(a+b)+1\leq 0$

$\{(a+b)+1\}^2\leq 0$

그런데 a, b가 실수이므로 $a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^3+b^3-3ab &= (a+b)^3-3ab(a+b)-3ab\\ &= (-1)^3-3ab(-1)-3ab\\ &= -1\end{aligned}$$

18. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$을 만족하는 양수 x에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$ 의 값은?

① 4 ② 2 ③ −1 ④ 5 ⑤ −5

해설

근의 공식을 이용하여 x를 구하면

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$

$4x-\sqrt{41}=-1,\ 2x^2+x=5$

(준식)$=(-1)^2+(2x^2+x-1)=1+(5-1)=5$

19. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2+2cx+a-b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a>0,\ b>0,\ c>0$
따라서, $a+b>0$이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$
$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)=0$
정리하면, $c^2-a^2+b^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a가 빗변인 직각삼각형

20. 방정식 $x^3-3x+1=0$의 한 근을 α, $x^2-\alpha x+1=0$의 한 근을 β라 할 때, $\beta^3+\frac{1}{\beta}^3$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$\alpha^3-3\alpha+1=0$에서 $\alpha^3-3\alpha=-1$
$\beta^2-\alpha\beta+1=0$에서 양변을 β로 나누면

$\beta+\frac{1}{\beta}=\alpha(\because \beta\neq 0)$

$$\begin{aligned}\therefore \beta^3+\frac{1}{\beta}^3 &= \left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^3-3\beta\cdot\frac{1}{\beta}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)\\ &= \alpha^3-3\alpha=-1\end{aligned}$$