1. 이차식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4 = 0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (2k^2 - 6k + 4) = 0$
위의 식을 정리하면
$-k^2 + 4k - 3 = 0$
$k^2 - 4k + 3 = 0$
$(k-1)(k-3) = 0$에서
$k = 1$ 또는 $k = 3$

2. 이차방정식 $2x^2-6x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $2x^2-6x+1=0$
② $x^2-6x+1=0$
③ $x^2-7x+3=0$
④ $2x^2+6x-1=0$
⑤ $2x^2-7x+3=0$

해설

근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=\frac{6}{2}=3$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$ 이므로

3 과 $\frac{1}{2}$을 이용한 근과 계수의 관계를 구해보면

$3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, $3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0$

$\therefore\ 2x^2-7x+3=0$

3. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면
$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$
$\therefore x^2+2x+4$
$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$
$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

4. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 점 $(1, 5)$ 를 지나고, $x = -1$ 일 때 최솟값 -3 을 가진다. 이 때, abc 의 값은?

① -10　② -8　③ -6　④ -4　⑤ -2

해설

$y = a(x+1)^2 - 3$ 에 $(1,\ 5)$ 를 대입하면 $a = 2$
따라서 $y = 2(x+1)^2 - 3$ 을 전개하면
$y = 2x^2 + 4x - 1$ 이므로 $a = 2,\ b = 4,\ c = -1$
$\therefore\ \ abc = -8$

5. 함수 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$가 $-2 \le x \le 2$에서 최댓값 5 , 최솟값 -4를 가질 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 상수이고 $a < 0$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x) = ax^2 - 2ax + b$
$= a(x-1)^2 - a + b$ 에서 $a < 0$ 이고
꼭짓점의 x좌표 1이 $-2 \le x \le 2$에 속하므로
$x = 1$일 때 최댓값을 갖고,
$x = -2$일 때 최솟값을 갖는다.
즉, $f(1) = -a + b = 5$, $f(-2) = 8a + b = -4$
두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 4$
$\therefore a + b = 3$

6. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots \quad$ ㉠

$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots \quad$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3$, $xy=2$

$\therefore \quad ab=2$

7. 다음 보기 중 옳은 것의 개수는? (단, $i = \sqrt{-1}$)

㉠ 16의 제곱근은 4이다.

㉡ 실수를 제곱하면 양수 또는 0이다.

㉢ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z + \bar{z}$ 는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

㉣ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z\bar{z}$는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

㉤ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z = \bar{z}$이면 z는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

㉠ 제곱해서 16 이 되는 수 $4, -4$ $\therefore$ 거짓
㉡ 실수는 제곱하면 0보다 크거나 같다. $\therefore$ 참
㉢ $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $z + \bar{z} = 2a$ $\therefore$ 참
㉣ $z\bar{z} = a^2 + b^2$ $\therefore$ 참
㉤ $z = \bar{z}$, $a + bi = a - bi$, $2bi = 0$, $b = 0$ $\therefore$ $z = a = \bar{z}$ $\therefore$ 참

8. 합이 26 인 두 수가 있다. 두 수의 곱이 최대가 되는 두 수를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

▷ 정답 : 13

해설

두 수를 각각 x , $26-x$ 라고 하면,

$y = x(26-x)$

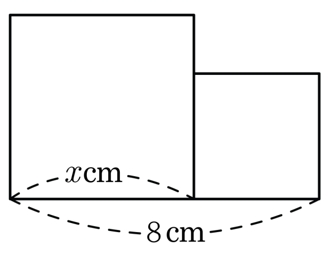
$= -x^2 + 26x$

$= -(x-13)^2 + 169$

$x = 13$ 일 때, 최댓값 169를 가진다.

$26 - x = 13$ 이므로 구하는 두 수는 13, 13이다.

9. 다음 그림과 같이 길이가 8cm 인 선분을 둘로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형을 만들었다. 두 정사각형의 넓이의 합을 $y\text{cm}^2$ 라 할 때, 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 하는 $x(\text{cm})$ 의 값과 그 때의 넓이 $y(\text{cm}^2)$ 를 구하여라.



① $x = 2, y = 12$　② $x = 2, y = 14$　③ $x = 2, y = 16$
④ $x = 4, y = 32$　⑤ $x = 4, y = 34$

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (8-x)^2 \\ &= 2(x^2 - 8x + 16 - 16) + 64 \\ &= 2(x-4)^2 + 32 \end{aligned}$$

따라서 $x = 4$ 일 때 $y = 32$ 이다.

10. 방정식 $x^3-5x^2+2x+1=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$\alpha+\beta+\gamma=5$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=-1$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=1+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)$

$=1+2-(-1)-5=-1$

11. 다음은 α가 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 한 근일 때, α^2-2도 이 방정식의 근임을 보인 것이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 <u>않은</u> 것은?

> α 는 $x^3-3x+1=0$ 의 근이므로 (가)
> $f(x)=x^3-3x+1$ 이라고 하면
> $f(\alpha^2-2)=$ (나) $=$ (다) $=$ (라) $=$ (마) $=0$
> 따라서, α^2-2 도 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$ 의 근이다.

① (가) $\alpha^3-3\alpha+1=0$

② (나) $(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1$

③ (다) $\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1$

④ (라) $(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)$

⑤ (마) $0\cdot 2$

해설

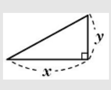
α는 $x^3-3x+1=0$의 근이므로 $\alpha^3-3\alpha+1=0$
$f(x)=x^3-3x+1$이라고 하면 $f(\alpha^2-2)=(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1$
$=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1=(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)=0\cdot(-2)=0$
따라서 α^2-2도 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 근이다.

12. 직각 삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 $21\,\text{cm}$이고, 빗변의 길이가 $15\,\text{cm}$일 때, 직각을 낀 두 변의 길이 중 긴 변의 길이를 구하시오.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : $12\,\text{cm}$

해설



직각을 낀 두 변의 길이를 x, y 라 하면

$$\begin{cases} x + y = 21 \cdots ① \\ x^2 + y^2 = 15^2 \cdots ② \end{cases}$$ 이다.

①에서 $y = 21 - x$ 를 ②에 대입하면

$x^2 + (21 - x)^2 = 15^2$

$x^2 + 21^2 - 42x + x^2 = 15^2$

$2x^2 - 42x + 21^2 - 15^2 = 0$

$2x^2 - 42x + (21 + 15)(21 - 15) = 0$

$x^2 - 21x + 3 \times 36 = 0$

$(x - 12)(x - 9) = 0$,

$x = 12$ 또는 $x = 9$

$x = 12$ 일 때 $y = 9$

$x = 9$ 일 때 $y = 12$

따라서 긴 변의 길이는 $12\,\text{cm}$이다.

13. 두 이차방정식 $ax^2+4x+2=0$, $x^2+ax+1=0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{5}{7}$

해설

공통근을 t 라 하면
$at^2+4t+2=0\cdots$ ㉠
$t^2+at+1=0\cdots$ ㉡
㉠ − ㉡ × 2 : $(a-2)t^2+(4-2a)t=0$
$(a-2)t(t-2)=0$
이때, $a=2$ 이면 두 방정식은 서로 같으므로 $a\neq 2$
그런데 $t=0$ 이면 ㉠, ㉡의 해가 존재하지 않으므로 $t=2$
따라서 ㉡에서 $2a+5=0$
$\therefore\ a=-\frac{5}{2}$

14. 방정식 $2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$ 을 만족시키는 실수 x, y의 곱 xy를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$에서
$(x^2+2xy+y^2)+(x^2-4x+4)=0$
$(x+y)^2+(x-2)^2=0$
x, y가 실수이므로 $x+y=0$, $x-2=0$
$\therefore\ x=2,\ y=-2$
$\therefore\ xy=-4$

15. 자연수 n에 대해 $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$x = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2 \right\}^n + \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2 \right\}^n$$

$$= \left(\frac{2}{2i}\right)^n + \left(\frac{2}{-2i}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{i}\right)^n + \left(-\frac{1}{i}\right)^n = (-i)^n + i^n$$

i^n 은 $n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$, $n = 4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n = 4k$ 이면 $x = 1 + 1 = 2$

(ii) $n = 4k+1$ 이면 $x = -i + i = 0$

(iii) $n = 4k+2$ 이면 $x = -1 - 1 = -2$

(iv) $n = 4k+3$ 이면 $x = i - i = 0$

$\therefore\ x = 2,\ 0,\ -2$

따라서, x가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

16. $x=-1+i$ 일 때, $x^4+2x^3+x^2-x-1$ 의 값을 구하면?

① $-1+i$　　② $-i$　　③ i

④ -1　　⑤ 1

해설

$x=i-1 \Rightarrow x+1=i$

양변을 제곱해서 정리하면 $x^2+2x+2=0$

$x^4+2x^3+x^2-x-1$

$=x^2(x^2+2x+2)-x^2-x-1$

$=-x^2-x-1\ (\because\ x^2+2x+2=0)$

$=-(-2x-2)-x-1$

$=x+1=i$

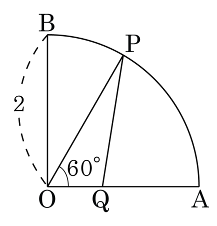
17. 이차방정식 $ax(x-1)+bx(x-1)+c(x^2+1)=0$의 두근을 α, β라 할 때, $\dfrac{c}{(\alpha-1)(\beta-1)}$의 값은?

① $\dfrac{a+b+c}{2}$ ② $a+b+c$ ③ $ab+bc+ca$
④ $\dfrac{ab+bc+ca}{2}$ ⑤ abc

해설

(Ⅰ) 주어진 식을 정리하면
$(a+b+c)x^2-(a+b)x+c=0 \quad (a+b+c\neq 0)$
$\alpha+\beta=\dfrac{a+b}{a+b+c}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a+b+c}$
(Ⅱ) (준식) $=\dfrac{c}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$
$=\dfrac{c(a+b+c)}{c-(a+b)+(a+b+c)}$
$=\dfrac{c(a+b+c)}{2c}=\dfrac{a+b+c}{2}$

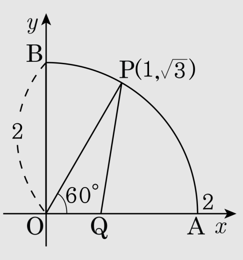
18. 반지름의 길이가 2 인 사분원 OAB 의 호 AB 위에 $\angle AOP = 60^\circ$ 가 되도록 점 P 를 정한다. 이 때, 선분 OA 위를 움직이는 점 Q 에 대하여 $\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2$ 의 최솟값은?



① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{15}{4}$
④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

아래 그림과 같이 좌표평면을 도입하여 생각해 보면



$A(2,0), B(0,2), P(1, \sqrt{3})$ 이 된다.
이 때, $Q(x,\ 0)$ 로 놓으면 $(0 < x < 2)$

$\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2 = x^2 + (x-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 2x^2 - 2x + 4 =$
$2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$

따라서, $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2$ 은

최솟값 $\frac{7}{2}$ 을 갖는다.

19. 이차함수 $y = -2x^2 - 4(k-1)x + 3k$ 의 최댓값을 K라 할 때, K 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{15}{8}$

해설

$y = -2x^2 - 4(k-1)x + 3k$
$= -2\left\{x^2 + 2(k-1)x + (k-1)^2\right\} + 2(k-1)^2 + 3k$
$= -2\left\{x + (k-1)\right\}^2 + 2(k-1)^2 + 3k$
$\therefore K = 2(k-1)^2 + 3k$
$= 2k^2 - k + 2$
$= 2\left(k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{16}\right) + \frac{15}{8}$
$= 2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}$

따라서 K 의 최솟값은 $\frac{15}{8}$ 이다.

20. 둘레의 길이가 10 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l 이라고 하면 $2r+l=10$, $l=10-2r$
부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(10-2r) \\ &= -r^2+5r \\ &= -\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4} \end{aligned}$$

따라서 반지름이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 넓이가 최대가 된다.