

1. 삼차방정식 $x^3 + x - 2 = 0$ 의 해를 구하면?

① $1, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

② $-1, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

③ $-1, \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$

④ -1

⑤ 1

해설

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+2) = 0$$

$$x^2+x+2=0 \text{ 의 근 : } \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$$\therefore \text{ 해 : } 1, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

2. 방정식 $x^3 - x = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = -1$

▷ 정답: $x = 0$

▷ 정답: $x = 1$

해설

좌변을 인수분해 하면

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$$

$$\therefore x = -1, 0, 1$$

3. 다음 방정식의 모든 근의 합을 구하여라.

$$x^3 - 13x + 12 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ & & 1 & 1 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & 0 \end{array}$$

$f(x) = x^3 - 13x + 12$ 라고 하면 $f(1) = 0$ 이므로

$$(x-1)(x^2 + x - 12) = 0$$

$$(x-1)(x+4)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore -4 + 1 + 3 = 0$$

4. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 의 근 중에서 최대의 근은?

① -2

② -1

③ 0

④ 6

⑤ 2

해설

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 에서

$x = 1, x = -1$ 을 대입하면 성립하므로

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$$

$$= (x-1)(x+1)(x^2+x-6)$$

$$= (x-1)(x+1)(x+3)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -3, -1, 1, 2$$

따라서 최대의 근은 2

5. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab 의 값은?

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0, x^3 + 2x^2 + ax + b = 0, x^2 + bx + a = 0$$

① -1

② 3

③ $-\frac{9}{4}$

④ $\frac{9}{16}$

⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$ 의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3) = 0$.
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = -3$

(i) 공통근이 $x = 1$ 인 경우 나머지 두 방정식에 $x = 1$ 을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 a, b 값은 없다.

(ii) 공통근이 $x = -3$ 인 경우 다른 두 방정식은 $x = -3$ 을 근으로 하므로 $\{-27 + 18 - 3a + b = 0\} \dots\dots \textcircled{\text{A}}$

$\{9 - 3b + a = 0\} \dots\dots \textcircled{\text{B}}$

$\textcircled{\text{A}}, \textcircled{\text{B}}$ 을 연립하여 풀면 $a = -\frac{9}{4}, b = \frac{9}{4}, ab = -\frac{81}{16}$

6. 삼차방정식 $x^3 + (p-4)x - 2p = 0$ 의 중근을 α , 다른 한 근을 β 라 할 때 $\alpha + \beta + p$ 의 값을 구하면?

- ① -10 또는 -2 ② -10 또는 -1 ③ -10 또는 2
 ④ -10 또는 4 ⑤ -10 또는 5

해설

$f(x) = x^3 + (p-4)x - 2p$ 로 놓으면 $f(2) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x-2)(x^2 + 2x + p) = 0$$

따라서 $x = 2$, $x^2 + 2x + p = 0$

그런데 중근을 가져야 하므로

i) $x = 2$ 가 $x^2 + 2x + p$ 의 근일 때

$$2^2 + 2 \times 2 + p = 0$$

$$\therefore p = -8, f(x) = (x-2)(x^2 + 2x - 8) = (x-2)^2(x+4)$$

$$\therefore \alpha = 2, \beta = -4$$

따라서, $\alpha + \beta + p = 2 + (-4) + (-8) = -10$

ii) $x^2 + 2x + p = 0$ 이 중근을 가질 때

$$D/4 = 0 \text{이므로 } D/4 = 1 - p = 0$$

$$\therefore p = 1, f(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 1) = (x-2)(x+1)^2$$

$$\therefore \alpha = -1, \beta = 2, p = 1$$

따라서, $\alpha + \beta + p = -1 + 2 + 1 = 2$

i) ii)로부터 $\alpha + \beta + p$ 의 값은 -10 또는 2이다.

7. 방정식 $2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ 의 세 근을 α, β, r 라 할 때, $(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r)$ 의 값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ 의 세 근이

α, β, r 이므로

$$2x^3 - 3x^2 + 6 = 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - r)$$

양변에 $\sqrt{2}$ 를 대입하면

$$4\sqrt{2} - 6 + 6$$

$$= 2(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r)$$

$$\therefore (\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r) = 2\sqrt{2}$$

8. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^3 + \bar{\omega}^3$ 의 값을 구하면? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켈레복소수이다.)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 를 } \omega \text{ 라 하면}$$

$$\bar{\omega} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore \omega^3 = 1, \bar{\omega}^3 = 1, \omega^3 + \bar{\omega}^3 = 2$$

9. $x^3 + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 값을 차례대로 구하여라.

$$(1) \omega^{20} + \omega^{10} + 1$$

$$(2) \omega^{101} + \bar{\omega}^{101} - \omega^{11} \cdot \bar{\omega} - \omega \cdot \bar{\omega}^{11}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

▷ 정답 : 2

해설

ω 가 $x^2 - x + 1$ 의 근이므로

$\bar{\omega}$ 도 $x^2 - x + 1$ 의 근이다.

즉, $\omega^3 = -1, \bar{\omega}^3$

$$= -1, \omega^2 - \omega + 1 = 0$$

$$(1) \omega^{20} + \omega^{10} + 1$$

$$= (\omega^3)^6 \cdot \omega^2 + (\omega^3)^3 \cdot \omega + 1$$

$$= (-1)^6 \cdot \omega^2 + (-1)^3 \cdot \omega + 1$$

$$= \omega^2 - \omega + 1 = 0$$

$$(2) \omega^{101} + \bar{\omega}^{101} - \omega^{11} \bar{\omega} - \omega \bar{\omega}^{11}$$

$$= (\omega^3)^{33} \cdot \omega^2 + (\bar{\omega}^3)^{33} \cdot \bar{\omega}^2 -$$

$$\omega \bar{\omega} \{ (\omega^3)^3 \cdot \omega + (\bar{\omega}^3)^3 \cdot \bar{\omega} \}$$

$$= (-1)\omega^2 + (-1)\bar{\omega}^2 - \{ (-1)\omega + (-1)\bar{\omega} \}$$

$$= -(\omega^2 - \omega) - (\bar{\omega}^2 - \bar{\omega})$$

$$= -(-1) - (-1) = 2$$

10. 연립방정식 $ax + by = 8$, $2ax - by = -2$ 의 근이 $x = 1$, $y = 2$ 일 때, a , b 의 값은?

① $a = -2$, $b = -3$

② $a = 3$, $b = 2$

③ $a = 2$, $b = -3$

④ $a = 2$, $b = 3$

⑤ $a = -3$, $b = -2$

해설

$$ax + by = 8, 2ax - by = -2$$

근이 $x = 1, y = 2$ 이므로

$$\begin{cases} a + 2b = 8 \\ 2a - 2b = -2 \end{cases}$$

$$\therefore a = 2, b = 3$$

11. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록

하는 a 값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}, -a^2 \neq -1$$

$$\therefore a \neq \pm 1$$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a 의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

12. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ ax-y=3 \end{cases}$ 의 해가 좌표평면의 제1사분면에 있기
 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > -1$

② $a < -1$

③ $a > \frac{3}{2}$

④ $a < \frac{3}{2}$

⑤ $a > -2$

해설

$$\begin{cases} x+y=2 & \dots \textcircled{A} \\ ax-y=3 & \dots \textcircled{B} \end{cases}$$

$\textcircled{A} + \textcircled{B}$ 에서 $(a+1)x=5$

$\therefore x = \frac{5}{a+1} \dots \dots \dots \textcircled{C}$

\textcircled{C} 을 \textcircled{A} 에 대입하면 $\frac{5}{a+1} + y = 2$

$\therefore y = 2 - \frac{5}{a+1}$

그런데 $x > 0, y > 0$ 이므로

$\frac{5}{a+1} > 0, 2 - \frac{5}{a+1} > 0$ 에서,

$a > \frac{3}{2}$

13. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$$\begin{cases} y = x + 1 & \dots \textcircled{㉠} \\ x^2 + y^2 = 5 & \dots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$x^2 + (x + 1)^2 = 5, 2x^2 + 2x - 4 = 0,$$

$$2(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, -2$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } y = 2,$$

$$x = -2 \text{ 일 때, } y = -1$$

$$\therefore \alpha = 1, \beta = 2 \text{ 또는 } \alpha = -2, \beta = -1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$$

14. 연립방정식 $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ 의 근 x, y 가 $xy = a$, $x + y = b$ 를 만족할 때, $a - b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 & \dots \textcircled{A} \\ x^2 + y^2 = 25 & \dots \textcircled{B} \end{cases}$$

①식을 정리해서

$y = 2x - 5$ 를 ②식에 대입한다.

$$x^2 + (2x - 5)^2 = 25,$$

$$5x^2 - 20x = 0, x(x - 4) = 0$$

$$\therefore x = 0, 4$$

i) $x = 0$ 일 때, $y = -5$

$$\therefore a = 0, b = -5$$

$$\therefore a - b = 5$$

ii) $x = 4$ 일 때, $y = 3$

$$\therefore a = 12, b = 7$$

$$\therefore a - b = 5$$

15. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

① $x = 2\sqrt{5}, y = -\sqrt{5}$

② $x = -2\sqrt{5}, y = \sqrt{5}$

③ $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}, y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

④ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}, y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

⑤ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

$x^2 + xy - 2y^2 = 0$ 에서

$(x - y)(x + 2y) = 0$

i) $x = y$ 일 때

$x^2 + y^2 = 2y^2 = 25$

$y = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}, x = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$

ii) $x = -2y$ 일 때

$x^2 + y^2 = 5y^2 = 25$

$y^2 = 5, y = \pm\sqrt{5}, x = \mp 2\sqrt{5}$ (복호동순)

\therefore 구하는 해는 $(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}), (-\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}),$

$(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}), (2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$

16. 두 이차방정식 $x^2 + kx + 3 = 0$, $x^2 + x + 3k = 0$ 이 공통인 실근 α 를 가질 때, $\alpha - k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

공통근이 α 이므로

$$\alpha^2 + k\alpha + 3 = 0 \quad \text{ⓐ}$$

$$\alpha^2 + \alpha + 3k = 0 \quad \text{ⓑ}$$

$$\text{ⓐ} - \text{ⓑ} \text{에서 } (k-1)\alpha - 3(k-1) = 0,$$

$$(k-1)(\alpha-3) = 0$$

(i) $k=1$ 인 경우 두 이차방정식이 $x^2+x+3=0$ 으로 일치하여 공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.

$$\text{(ii) } \alpha=3 \text{인 경우 } 9+3k+3=0 \therefore k=-4$$

$$\therefore \alpha - k = 7$$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x + y = 2 \\ y - z = a \end{cases}$ 가 실수해를 갖기 위한 실수 a 의

값의 범위를 $\alpha \leq a \leq \beta$ 라고 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?

① -4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$x = 2 - y, z = y - a$ 이므로

$$(2 - y)^2 + y^2 + (y - a)^2 = 3$$

$$\text{즉, } 3y^2 - 2(a + 2)y + a^2 + 1 = 0$$

$$D/4 = (a + 2)^2 - 3(a^2 + 1) = -2a^2 + 4a + 1 \geq 0$$

$$2a^2 - 4a - 1 \leq 0$$

$$\therefore \frac{2 - \sqrt{6}}{2} \leq a \leq \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$$

$$\therefore \alpha + \beta = 2$$

18. 방정식 $2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 와 y 의 곱은?

① -2

② 3

③ 4

④ 8

⑤ 10

해설

$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$ 에서

$$(x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 8x + 16) = 0,$$

$$(x - 2y)^2 + (x - 4)^2 = 0$$

$$x = 2y, x = 4$$

$$\therefore x = 4, y = 2 \quad \therefore xy = 8$$

19. 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$ 일 때, $x + y$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 8y + 5 \\ &= x^2 - 2(2y - 1)x + 4y^2 - 4y + 1 + y^2 - 4y + 4 \\ &= x^2 - 2(2y - 1)x + (2y - 1)^2 + (y - 2)^2 \\ &= (x - 2y + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0 \\ &\therefore x - 2y + 1 = 0, y - 2 = 0 \text{ 이므로} \\ &y = 2, x - 4 + 1 = 0 \quad \therefore x = 3 \\ &\text{따라서 } x + y = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

20. 방정식 $x^2 - 2xy + y^2 + |x + y - 2| = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

주어진 방정식을 정리하면 $(x - y)^2 + |x + y - 2| = 0$

이 때, $(x - y)^2 \geq 0$, $|x + y - 2| \geq 0$ 이므로

⊕이 성립하려면 $x - y = 0$, $x + y - 2 = 0$ 이어야 한다.

두 식을 연립하여 풀면 $x = 1$, $y = 1$

$\therefore xy = 1$

21. 방정식 $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$ 을 만족하는 두 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4x + 4 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

$$x, y \text{ 는 실수이므로 } x = -1, y = 2$$

$$\therefore x + y = -1 + 2 = 1$$

22. 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$ 의 근이 유리수가 되는 k 의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식 $D \geq 0$ 이어야 한다.

$D = 25 - 8k \geq 0$ 곧, $k \leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k = 3, 2, 1, \dots$ 이고,

이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k = 3$ 이다.

23. 방정식 $2xy - 4x - y = 4$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 를 구하면 $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$,

$$\begin{cases} x = \gamma \\ y = \delta \end{cases} \text{ 이다.}$$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x - 1)(y - 2) = 6$

조건에서 x, y 가 양의 정수이므로

$2x - 1, y - 2$ 도 각각 정수이고 특히 $2x - 1$ 은 양의 홀수이다.

$$\therefore \begin{cases} 2x - 1 = 1 \\ y - 2 = 6 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} 2x - 1 = 3 \\ y - 2 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma + \delta = 15$$

24. 자연수 n 에 대하여 이차방정식 $x^2 + nx + 2n = 0$ 의 두 근을 α, β 라 한다. α, β 가 정수일 때, n 은?

① 7, 8

② 8, 9

③ 9, 10

④ 9

⑤ 10

해설

근과 계수와의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -n$, $\alpha\beta = 2n$ 이므로
 $\alpha\beta = -2(\alpha + \beta)$, $\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) = 0$, $(\alpha + 2)(\beta + 2) = 4$
 α, β 가 정수이므로 $\alpha + 2, \beta + 2$ 도 정수
 따라서

$$\begin{cases} \alpha + 2 = 1 \\ \beta + 2 = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha + 2 = 2 \\ \beta + 2 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha + 2 = -1 \\ \beta + 2 = -4 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \alpha + 2 = -2 \\ \beta + 2 = -2 \end{cases} \text{가 되어}$$

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = -6 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = -4 \end{cases}$$

각각의 경우, n 의 값은 $n = -(\alpha + \beta)$ 이므로
 $-1, 0, 9, 8$ 의 값을 갖는다.

25. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30 개이고 배점은 80 점 이다. 문항별 배점은 2 점, 3 점, 4 점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2 점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

2 점문항 개수를 x , 3 점문항을 y ,
4 점문항을 z 라 하자

$$2x + 3y + 4z = 80 \quad \text{㉠}$$

$$x + y + z = 30 \quad \text{㉡}$$

$$\text{㉠} - 4 \times \text{㉡} \Rightarrow y = 40 - 2x$$

$$\text{㉠} - 3 \times \text{㉡} \Rightarrow z = x - 10$$

$$\therefore x = 10 \text{ 이면 } z = 0$$

← 조건이 성립하지 않음

$$\therefore x \geq 11, \text{ 최소 11 문항}$$