

1. 실수  $x, y$ 에 대하여 조건 ' $|x| + |y| = 0$ '의 부정과 같은 것은?

- ①  $x = y = 0$
- ②  $x = y \neq 0$
- ③  $x \neq 0$  이고  $y \neq 0$
- ④  $x, y$  중 적어도 하나는 0 이다.
- ⑤  $x, y$  중 적어도 하나는 0 이 아니다.

해설

$|x| + |y| = 0$ 의 부정은  $|x| + |y| \neq 0$ 이다.  
따라서,  $x \neq 0$  또는  $y \neq 0$  이므로  $x, y$  중 적어도 하나는 0 이 아니다.

2. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

- ① 자연수  $n$ 에 대하여,  $n^2$ 이 짝수이면  $n$ 도 짝수이다.
- ② 자연수  $n, m$ 에 대하여  $n^2 + m^2$ 이 홀수이면,  $nm$ 은 짝수이다.
- ③ 자연수  $n$ 에 대하여,  $n^2$ 이 3의 배수이면,  $n$ 은 3의 배수이다.
- ④  $a, b$ 가 실수일 때,  $a + b\sqrt{2} = 0$ 이면,  $a = 0$ 이다.
- ⑤ 두 실수  $a, b$ 에 대하여,  $a + b > 2$ 이면,  $a > 1$  또는  $b > 1$

해설

- ①, ③ :  $n^2$ 이  $p$ 의 배수이면,  $n$ 은  $p$ 의 배수이다. (참)
- ② : 대우는 ‘ $nm$ 은 홀수이면  $n^2 + m^2$ 이 짝수이다.’  $nm$ 은 홀수, 즉  $n, m$  모두 홀수이면  $n^2, m^2$  모두 홀수이므로  $n^2 + m^2$ 은 짝수이다.  
∴ 주어진 명제는 참
- ④ 반례 :  $a = 2\sqrt{2}, b = -1$   
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는  $a, b$ 가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
- ⑤ 대우 :  $a \leq 1$  그리고  $b \leq 1$ 이면  $a + b \leq 2$  (참)

3. 전체집합  $U$  에서 두 조건  $p, q$  를 만족하는 집합을 각각  $P, Q$  라 한다.  
 $\sim p \rightarrow \sim q$  가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

- ①  $P \cup Q = U$
- ②  $P \cap Q = \emptyset$
- ③  $Q \subset P$
- ④  $P \subset Q$
- ⑤  $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$  이 참이면  $P^c \subset Q^c \Leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$  이 참이면 대우인  $q \rightarrow p$  가 참  
따라서  $Q \subset P$

4. 다음 중 ‘모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.’의 부정인 명제를 고르면?
- ① 평화시에 살고 있지 않으면 평화고등학교 학생이 아니다.
  - ② 평화시에 사는 학생은 평화고등학교 학생이다.
  - ③ 모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있지 않다.
  - ④ 평화시에 살고 있지 않은 평화고등학교 학생이 적어도 한명은 있다.
  - ⑤ 어떤 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.

**해설**

모든 ~ 이다. : (부정)  $\Rightarrow$  어떤 ~ 아니다.  
적어도 ~ 아니다.

5.  $n$  이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

‘ $n^2$  이 12의 배수이면  $n$  은 12의 배수이다.’

▶ 답 :                      8   가지

▷ 정답 : 8 가 지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는  $n^2$  이 12의 배수이면서  $n$  이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉,  $n$  은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6 \times 1, 6 \times 3, 6 \times 5, 6 \times 7, 6 \times 9, 6 \times 11, 6 \times 13, 6 \times 15\}$

6. 두 조건  $p : |x - 2| \leq h$ ,  $q : |x + 1| \leq 7$ 에 대하여 ‘ $p$ 이면  $q$ 이다.’가 참이 되도록 하는  $h$ 의 최댓값을 구하여라. (단,  $h \geq 0$ )

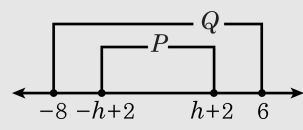
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$p : 2 - h \leq x \leq 2 + h$$

$$q : -8 \leq x \leq 6$$



$$-h + 2 \geq -8 \Leftrightarrow h \leq 10, h + 2 \leq 6 \Leftrightarrow h \leq 4$$

$$\therefore h \leq 4$$

$$\therefore n \text{의 최댓값은 } 4$$

7. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

- ①  $xy \geq 0$  이면  $x \geq 0$  또는  $y \geq 0$
- ②  $x + y \geq 0$  이면  $x \geq 0$  이고  $y \geq 0$
- ③  $x \geq y$  이면  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$
- ④  $x \leq 2$  이면  $|x - 1| \leq |x - 3|$
- ⑤  $a > 0$  이고  $b > 0$  이면  $a^2 + b^2 > 0$

해설

- ① 거짓 : (반례)  $x = -2, y = -1$  일 때,  
 $xy = 2 \geq 0$  이지만  $-2 < 0$  이고  $-1 < 0$  이다.
- ② 거짓 : (반례)  $x = -2, y = 3$  일 때,  
 $x + y = -2 + 3 \geq 0$  이지만  $-2 < 0$  이고  $3 > 0$  이다.
- ③ 거짓 : (반례)  $x = 2, y = -2$  일 때,  
 $2 \geq -2$  이지만  $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$  이다.
- ④  $|x - 1| \leq |x - 3|$  의 양변을 제곱하면  
 $x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 6x + 9$  에서  $x \leq 2$  이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
- ⑤ 명제 ‘ $a > 0$  이고  $b > 0$  이면  $a^2 + b^2 > 0$  ’ 은 참이지만, 그의 역 ‘ $a^2 + b^2 > 0$  이면  $a > 0$  이고  $b > 0$  ’은 거짓이다.

8. 양수  $x$ 에 대하여 명제 ' $ax^2 - a^2x + 2 \neq 0$ 이면  $x \neq 1$ 이다.'가 참이기 위한  $a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

' $x = 1$ 이면  $ax^2 - a^2x + 2 = 0$ 이다.'가 참이므로

$$a - a^2 + 2 = 0, \quad a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a + 1)(a - 2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 2$$

9. 두 명제  $p \rightarrow q$ ,  $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

①  $q \rightarrow r$

②  $p \rightarrow r$

③  $\sim q \rightarrow \sim p$

④  $r \rightarrow p$

⑤  $\sim r \rightarrow \sim p$

해설

$$\begin{aligned} p \rightarrow q(T) &\Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p(T), \sim r \rightarrow \sim q(T) \Rightarrow q \rightarrow r(T) \\ \therefore p \rightarrow q \rightarrow r(T) &\Rightarrow p \rightarrow r(T) \\ \therefore \sim r \rightarrow \sim p(T) \end{aligned}$$

10. 두 명제 ‘겨울이 오면 춥다.’ ‘눈이 오지 않으면 춥지 않다.’가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은?
- ① 추우면 눈이 온다.
  - ② 눈이 오면 겨울이 온다.
  - ③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.
  - ④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
  - ⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.

해설

명제가 참이면 대우도 참이다. 겨울이 오면 춥다. ⇔ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.  
눈이 오지 않으면 춥지 않다. ⇔ 추우면 눈이 온다. ⇒ 겨울이 오면 눈이 온다.  
②에서 ‘눈이 오면 겨울이 온다’는 참, 거짓을 판별할 수 없다.

11. 자연수  $n$ 에 대하여 ‘ $n^2$ 이 짝수이면  $n$ 도 짝수이다.’를 증명하는 과정이다. 이 때 괄호 안에 들어갈 알맞은 논리 중 틀린 것을 아래의 보기에서 고르면?

증명

주어진 명제의 ( ① )를 구하여 보면  $n$ 이 ( ② )이면  $n^2$ 도 ( ② )이다. 이 때  $n$ 이 ( ② )이므로  $n =$  (③) ( $k$ 는 0 또는 자연수)  
이 때  $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$   
 $\therefore n^2$ 은 ( ② )이다. 따라서, ( ① )가 ( ④ )이므로 주어진 명제는 ( ⑤ )이다.

① 대우

② 홀수

③  $2k + 1$

④ 거짓

⑤ 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

12. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $1 < x \leq 3$  은  $x > -2$  이기 위한 (가)조건이다.
  - $2x = 4$  는  $x^2 - 4x + 4 = 0$  이기 위한 (나)조건이다.

- ① 필요, 필요

② 필요, 충분

③ 충분, 충분

④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$$P = \{x \mid 1 < x \leq 3\},$$
$$Q = \{x \mid x > -2\} \text{ 라고 하면}$$
$$P \subset Q, \quad \therefore \text{충분조건}$$
$$R = \{x \mid 2x = 4\} = \{2\},$$
$$S = \{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0\} = \{2\} \text{ 라고 하면}$$
$$R = S, \quad \therefore \text{필요충분조건}$$

13. 다음 중 명제  $|\alpha - \beta| = |\alpha + \beta|$  의 필요조건이기는 하지만 충분조건은 아닌 것을 찾으면? (단,  $\alpha, \beta$  는 실수)

- ①  $\alpha\beta < 1$                       ②  $\alpha\beta = -1$                       ③  $\alpha\beta = 0$   
④  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$                       ⑤  $\alpha^2 - \beta^2 = 0$

해설

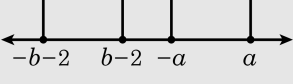
$|\alpha - \beta| = |\alpha + \beta| \rightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 \rightarrow -2\alpha\beta = 2\alpha\beta$   
 $\rightarrow \alpha\beta = 0$   
0 은 1 보다 작으므로  $\alpha\beta = 0$  이면  $\alpha\beta < 1$  라고 말할 수 있다.  
따라서,  $\alpha\beta < 1$  는  $\alpha\beta = 0$  의 필요조건이다.

14. 두 집합  $A, B$  가  $A = \{x \mid x^2 - a^2 \leq 0\}$ ,  $B = \{x \mid |x + 2| \leq b\}$  일 때,  $A \cap B = \emptyset$  이기 위한 필요충분조건은? (단,  $a > 0, b > 0$ )

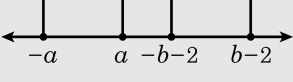
- ①  $ab = 2$
- ②  $ab = 4$
- ③  $a + b > 2$
- ④  $a + b < 4$
- ⑤  $a + b < 2$

해설

$A = \{x \mid x^2 - a^2 \leq 0\} = \{x \mid -a \leq x \leq a\}$   $B = \{x \mid |x + 2| \leq b\} = \{x \mid -b - 2 \leq x \leq b - 2\}$   $A \cap B = \emptyset$  이기 위해서는 그림과 같아야 한다.



또는



그런데  $a > 0, b > 0$  에서  $-b - 2 < 0$  이므로 아래 수직선의 경우는 모순이다. 위의 수직선에서  $b - 2 < -a$  이므로 만족하는 조건은  $a + b < 2$  ( $\because a > 0, b > 0$ )

15. 두 조건  $p, q$  를 만족하는 집합을 각각  $P, Q$  라 하자.  $p$  가  $q$  이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

①  $Q^c \cap P^c = Q^c$

②  $P - Q = \emptyset$

③  $P \cup Q = Q$

④  $Q - P = \emptyset$

⑤  $P \cap Q = P$

해설

$p$  가  $q$  이기 위한 충분조건이므로  $P \subset Q$

$p$  가  $q$  이기 위한 필요조건이 아니므로  $Q \not\subset P$

$\therefore Q - P \neq \emptyset$

16. 네 조건  $p, q, r, s$ 에 대하여  $p, q$ 는 각각  $r$ 이기 위한 충분조건,  $s$ 는  $r$ 이기 위한 필요조건,  $q$ 는  $s$ 이기 위한 필요조건이다. 이때,  $p$ 는  $q$ 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여야.

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$p$  는  $r$  이기 위한 충분조건이므로  $p \Rightarrow r$

$q$  는  $r$  이기 위한 충분조건이므로  $q \Rightarrow r$

$s$  는  $r$  이기 위한 필요조건이므로  $r \Rightarrow s$

$q$  는  $s$  이기 위한 필요조건이므로  $s \Rightarrow q$

따라서,  $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$

$$\therefore p \Rightarrow q$$

그러나  $q \Rightarrow p$  인지는 알 수 없다.

$\therefore p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이다.

17. 어느 학생이  $x, y, z$ 의 평균  $A$ 를 구하기 위하여  $x, y$ 의 평균  $C$ 를 먼저 구하고,  $C$ 와  $z$ 의 평균  $B$ 를 구하였다. 다음 중 옳은 것은?  
(단,  $x < y < z$ )

①  $B = A$

②  $B < A$

③  $B > A$

④  $B \leq A$

⑤  $B \geq A$

해설

$$A = \frac{x+y+z}{3}, C = \frac{x+y}{2}$$

$$B = \frac{\frac{x+y}{2} + z}{2} = \frac{x+y+2z}{4},$$

$$B - A = \frac{2z - x - y}{12} = \frac{(z-x) + (z-y)}{12} > 0$$

$$\therefore B > A$$

18.  $a > 0$  일 때,  $A = 1 + \frac{a}{2}$ ,  $B = \sqrt{1+a}$  의 대소를 바르게 비교한 것은?

①  $A > B$

②  $A < B$

③  $A \geq B$

④  $A \leq B$

⑤  $A = B$

해설

$a > 0$  이므로  $1 + \frac{a}{2} > 0$ ,  $\sqrt{1+a} > 0$

제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{1+a})^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a \\ &= \frac{a^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

따라서  $A^2 > B^2$  이므로  $A > B$  이다.

19. 부등식  $7^{20} < n^{10}$  을 만족시키는 자연수  $n$  의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$$

$$\frac{49}{n} < 1 \text{ 이므로 } n > 49$$

따라서 자연수  $n$  의 최솟값은 50 이다.

20.  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$ ,  $0 < z < 1$ 인 실수  $x$ ,  $y$ ,  $z$ 가  $x + y + z = 2$ 를 만족시킬 때,  $k = xy + yz + zx$ 가 가질 수 있는 값의 범위는?

①  $1 < k \leq \frac{4}{3}$

②  $1 \leq k < \frac{4}{3}$

③  $0 < k < 2$

④  $0 < k \leq 2$

⑤  $1 < k < 3$

해설

$x < 1$ ,  $y < 1$ 에서  $1 - x > 0$ ,  $1 - y > 0$ 이므로  $(1 - x)(1 - y) > 0$

양변에  $x + y - 1$ 을 더하고 좌변쪽을 음수로 묶어주면

$$xy = (1 - x)(1 - y) - (1 - x - y) > x + y - 1$$

마찬가지방법으로  $yz$ ,  $zx$ 를 구하여 보면

$$\begin{cases} xy = (1 - x)(1 - y) - (1 - x - y) > x + y - 1 \\ yz = (1 - y)(1 - z) - (1 - y - z) > y + z - 1 \\ zx = (1 - z)(1 - x) - (1 - z - x) > z + x - 1 \end{cases} \quad \text{에서}$$

$$xy + yz + zx > 2(x + y + z) - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

또,  $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ 에서 ( $\because x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$ 에서 양 변에  $3(xy + yz + zx)$ 를 더한다)

$$4 \geq 3(xy + yz + zx)$$

$$\therefore 1 < xy + yz + zx \leq \frac{4}{3}$$

21. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 이  $x$  축,  $y$  축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때,  $\triangle OBC$  의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

- ① 6
- ② 8
- ③ 10
- ④ 12
- ⑤  $2\sqrt{6}$

해설

$\triangle OBC$ 의 넓이를  $S$  라 하면

$S = \frac{1}{2}ab,$     A(3, 2)

는 직선  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  위의 점이므로

$1 = \frac{3}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{3}{a} \times \frac{2}{b}} = 2\sqrt{\frac{3}{S}}$

양변을 제곱하면  $1 \geq \frac{12}{S} \quad \therefore S \geq 12$

따라서  $\triangle OBC$ 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

22. 양수  $x$ 에 대하여  $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최솟값은?

- ①  $2\sqrt{3}$       ②  $2\sqrt[3]{3}$       ③ 6      ④ 8      ⑤ 10

해설

$x > 0$ 이므로

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$
$$\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$$

(단, 등호는  $x = \frac{1}{2}$ 일 때 성립)

23. 양수  $x$ 에 대하여  $\frac{x^2+2x+2}{x}$ 는  $x = a$ 에서 최솟값  $b$ 를 가질 때,  
 $-2a + b + 1$ 의 값은?

- ① 3                      ② 4                      ③ 5                      ④ 6                      ⑤ 7

해설

$x > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x} = x + 2 + \frac{2}{x}$$
$$x + \frac{2}{x} + 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

(단, 등호는  $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립)

최솟값이  $2\sqrt{2} + 2$ 이므로  $b = 2\sqrt{2} + 2$

등호는  $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립하므로  $a = \sqrt{2}$

따라서  $-2a + b + 1 = -2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 2) + 1 = 3$

24. 제곱의 합이 일정한 두 실수  $a, b$ 에 대하여  $a + 2b$ 가 최대일 때,  $a$ 와  $b$ 사이의 관계는?

①  $b = 2a$

②  $a = 2b$

③  $a = b$

④  $a^2 = b$

⑤  $b^2 = a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a + 2b)^2 \leq (1^2 + 2^2)(a^2 + b^2)$$

$$\therefore (a + 2b)^2 \leq 5c$$

이 때, 등호는  $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$  일 때 성립

$$\therefore b = 2a$$

25. 두 실수  $x, y$ 의 제곱의 합이 10일 때,  $x + 3y$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 한다. 이 때,  $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해  
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$   
 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로  $100 \geq (x + 3y)^2$   
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$   
 $\therefore M = 10, m = -10$   
 $\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$