1. 실수 x, y 에 대하여 조건 '$|x| + |y| = 0$' 의 부정과 같은 것은?

① $x = y = 0$

② $x = y \neq 0$

③ $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$

④ x, y 중 적어도 하나는 0 이다.

⑤ x, y 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

해설

$|x| + |y| = 0$ 의 부정은 $|x| + |y| \neq 0$ 이다.
따라서, $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이므로 x, y 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

2. 다음 중 항상 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① 자연수 n에 대하여, n^2이 짝수이면 n도 짝수 이다.

② 자연수 n, m에 대하여 n^2+m^2이 홀수이면, nm은 짝수이다.

③ 자연수 n에 대하여, n^2이 3의 배수이면, n은 3의 배수이다.

④ a, b가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$이면, $a=0$이다.

⑤ 두 실수 a, b에 대하여, $a+b>2$이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : n^2이 p의 배수이면, n은 p의 배수이다. (참)
② : 대우는 'nm은 홀수이면 n^2+m^2이 짝수이다.' nm은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 n^2+m^2은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2}, b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 a, b가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a\leqq 1$ 그리고 $b\leqq 1$이면 $a+b\leqq 2$ (참)

3. 전체집합 U 에서 두 조건 $p,\ q$ 를 만족하는 집합을 각각 $P,\ Q$ 라 한다. $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$ ② $P \cap Q = \varnothing$ ③ $Q \subset P$

④ $P \subset Q$ ⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$이 참이면 $P^c \subset Q^c \Leftrightarrow P \supset Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q$이 참이면 대우인 $q \rightarrow p$ 가 참

따라서 $Q \subset P$

4. 다음 중 '모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.' 의 부정인 명제를 고르면?

① 평화시에 살고 있지 않으면 평화고등학교 학생이 아니다.

② 평화시에 사는 학생은 평화고등학교 학생이다.

③ 모든 평화고등하교 학생들은 평화시에 살고 있지 않다.

④ 평화시에 살고 있지 않은 평화고등학교 학생이 적어도 한명은 있다.

⑤ 어떤 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.

해설

모든 ~ 이다. : (부정) ⇒ 어떤 ~ 아니다.
적어도 ~ 아니다.

5. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

'n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.'

▶ **답 :** _____ 가지

▷ **정답 :** 8가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6 \times 1,\ 6 \times 3,\ 6 \times 5,\ 6 \times 7,\ 6 \times 9,\ 6 \times 11,\ 6 \times 13,\ 6 \times 15\}$

6. 두 조건 $p : |x-2| \le h$, $q : |x+1| \le 7$에 대하여 'p이면 q이다.'가 참이 되도록 하는 h의 최댓값을 구하여라. (단, $h \ge 0$)

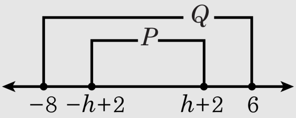
▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

p : $2-h \le x \le 2+h$

q : $-8 \le x \le 6$



$-h+2 \ge -8 \leftrightarrow h \le 10$, $h+2 \le 6 \leftrightarrow h \le 4$

$\therefore h \le 4$

$\therefore n$의 최댓값은 4

7. 다음 중 명제와 그 역이 <u>모두</u> 참인 것은?

① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$

② $x + y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$

③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

④ $x \leq 2$ 이면 $|x-1| \leq |x-3|$

⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$

해설

① 거짓 : (반례) $x = -2,\ y = -1$ 일 때,
$xy = 2 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $-1 < 0$ 이다.
② 거짓 : (반례) $x = -2,\ y = 3$ 일 때,
$x + y = -2 + 3 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $3 > 0$ 이다.
③ 거짓 : (반례) $x = 2,\ y = -2$ 일 때,
$2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
④ $|x-1| \leq |x-3|$ 의 양변을 제곱하면
$x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 6x + 9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
⑤ 명제 '$a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$' 은 참이지만, 그의 역 '$a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$'은 거짓이다.

8. 양수 x 에 대하여 명제 '$ax^2 - a^2x + 2 \neq 0$ 이면 $x \neq 1$ 이다.' 가 참이기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
'$x = 1$ 이면 $ax^2 - a^2x + 2 = 0$ 이다.' 가 참이므로
$a - a^2 + 2 = 0,\ a^2 - a - 2 = 0$
$(a+1)(a-2) = 0$
$\therefore\ a = -1$ 또는 $a = 2$
$a > 0$ 이므로 $a = 2$

9. 두 명제 $p \to q$, $\sim r \to \sim q$가 모두 참일 때 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $q \to r$ ② $p \to r$ ③ $\sim q \to \sim p$

④ $r \to p$ ⑤ $\sim r \to \sim p$

해설

$p \to q(T) \Rightarrow \sim q \to \sim p\,(T)$, $\sim r \to \sim q\,(T) \Rightarrow q \to r\,(T)$

$\therefore\ p \to q \to r\,(T) \Rightarrow p \to r\,(T)$

$\therefore \sim r \to \sim p\,(T)$

10. 두 명제 '겨울이 오면 춥다.' '눈이 오지 않으면 춥지 않다.'가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은?

① 추우면 눈이 온다.

② 눈이 오면 겨울이 온다.

③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.

해설

명제가 참이면 대우도 참이다. 겨울이 오면 춥다. ↔ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
눈이 오지 않으면 춥지 않다. ↔ 추우면 눈이 온다. ⇒ 겨울이 오면 눈이 온다.
②에서 '눈이 오면 겨울이 온다'는 참, 거짓을 판별할 수 없다.

11. 자연수 n에 대하여 'n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.'를 증명하는 과정이다. 이 때 괄호 안에 들어갈 알맞은 논리 중 <u>틀린</u> 것을 아래의 보기에서 고르면?

증명

주어진 명제의 (①)를 구하여 보면 n이 (②)이면 n^2 도 (②)이다. 이 때 n이 (②)이므로 $n=$ (③) (k 는 0 또는 자연수)
이 때 $n^2 = 2(2k^2+2k)+1$
$\therefore n^2$은 (②)이다. 따라서, (①)가 (④)이므로 주어진 명제는 (⑤)이다.

① 대우 ② 홀수 ③ $2k+1$
④ 거짓 ⑤ 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

12. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

• $1 < x \le 3$ 은 $x > -2$ 이기 위한 (가) 조건이다. • $2x = 4$ 는 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 이기 위한 (나) 조건이다.

① 필요, 필요
② 필요, 충분
③ 충분, 충분
④ 충분, 필요
⑤ 충분, 필요충분

해설

$P = \{x \mid 1 < x \le 3\}$,

$Q = \{x \mid x > -2\}$ 라고 하면

$P \subset Q$, $\quad\therefore$ 충분조건

$R = \{x \mid 2x = 4\} = \{2\}$,

$S = \left\{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0\right\} = \{2\}$ 라고 하면

$R = S$, $\quad\therefore$ 필요충분조건

13. 다음 중 명제 $|\alpha-\beta|=|\alpha+\beta|$ 의 필요조건이기는 하지만 충분조건은 아닌 것을 찾으면? (단, α,β 는 실수)

① $\alpha\beta<1$ ② $\alpha\beta=-1$ ③ $\alpha\beta=0$

④ $\alpha^2+\beta^2=0$ ⑤ $\alpha^2-\beta^2=0$

해설

$|\alpha-\beta|=|\alpha+\beta| \rightarrow (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2 \rightarrow -2\alpha\beta=2\alpha\beta$
$\rightarrow \alpha\beta=0$

0 은 1 보다 작으므로 $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha\beta<1$ 라고 말할 수 있다.
따라서, $\alpha\beta<1$ 는 $\alpha\beta=0$ 의 필요조건이다.

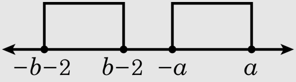
14. 두 집합 A, B 가 $A=\{x \mid x^2-a^2 \le 0\}$, $B=\{x \mid |x+2| \le b\}$ 일 때, $A \cap B = \varnothing$ 이기 위한 필요충분조건은? (단, $a>0$, $b>0$)

① $ab=2$ ② $ab=4$ ③ $a+b>2$

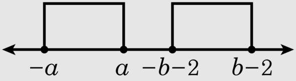
④ $a+b<4$ ⑤ $a+b<2$

해설

$A=\{x \mid x^2-a^2 \le 0\} = \{x \mid -a \le x \le a\}$ $B=\{x \mid |x+2| \le b\}$ $=\{x \mid -b-2 \le x \le b-2\}$ $A \cap B = \varnothing$ 이기 위해서는 그림과 같아야 한다.



또는



그런데 $a>0$, $b>0$ 에서 $-b-2<0$ 이므로아래 수직선의 경우는 모순이다. 위의 수직선에서 $b-2<-a$ 이므로 만족하는 조건은 $a+b<2$ ($\because a>0, b>0$)

15. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $Q^c \cap P^c = Q^c$ ② $P - Q = \varnothing$ ③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \varnothing$ ⑤ $P \cap Q = P$

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$

$\therefore Q - P \neq \varnothing$

16. 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 $p,\ q$ 는 각각 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지를 말하여라.

▶ 답 : ________ 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$
q 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$
s 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow s$
q 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow q$
따라서, $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그러나 $q \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다.

17. 어느 학생이 x, y, z의 평균 A를 구하기 위하여 x, y의 평균 C를 먼저 구하고, C와 z의 평균 B를 구하였다. 다음 중 옳은 것은? (단, $x < y < z$)

① $B = A$ ② $B < A$ ③ $B > A$

④ $B \leq A$ ⑤ $B \geq A$

해설

$$A = \frac{x+y+z}{3},\ C = \frac{x+y}{2}$$

$$B = \frac{\frac{x+y}{2}+z}{2} = \frac{x+y+2z}{4},$$

$$B - A = \frac{2z-x-y}{12} = \frac{(z-x)+(z-y)}{12} > 0$$

$$\therefore \quad B > A$$

18. $a > 0$ 일 때, $A = 1 + \frac{a}{2}$, $B = \sqrt{1+a}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A > B$ ② $A < B$ ③ $A \geq B$

④ $A \leq B$ ⑤ $A = B$

해설

$a > 0$ 이므로 $1 + \frac{a}{2} > 0$, $\sqrt{1+a} > 0$

제곱을 하여 비교하면

$$A^2 - B^2 = \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{1+a}\right)^2$$
$$= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a$$
$$= \frac{a^2}{4} > 0$$

따라서 $A^2 > b^2$ 이므로 $A > B$ 이다.

19. 부등식 $7^{20} < n^{10}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$\frac{7^{20}}{n^{10}} = \frac{(7^2)^{10}}{n^{10}} = \left(\frac{49}{n}\right)^{10} < 1$$

$\frac{49}{n} < 1$ 이므로 $n > 49$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50 이다.

20. $0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1$인 실수 $x,\ y,\ z$가 $x+y+z=2$를 만족시킬 때, $k = xy+yz+zx$가 가질 수 있는 값의 범위는?

① $1 < k \le \frac{4}{3}$　② $1 \le k < \frac{4}{3}$　③ $0 < k < 2$
④ $0 < k \le 2$　⑤ $1 < k < 3$

해설

$x<1,\ y<1$에서 $1-x>0,\ 1-y>0$이므로 $(1-x)(1-y)>0$
양변에 $x+y-1$을 더하고 좌변쪽을 음수로 묶어주면
$xy=(1-x)(1-y)-(1-x-y)>x+y-1$
마찬가지방법으로 $yz,\ zx$를 구하여 보면

$$\begin{cases} xy=(1-x)(1-y)-(1-x-y)>x+y-1 \\ yz=(1-y)(1-z)-(1-y-z)>y+z-1 \\ zx=(1-z)(1-x)-(1-z-x)>z+x-1 \end{cases} \text{에서}$$

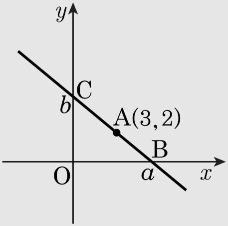
$xy+yz+zx>2(x+y+z)-3=2\cdot2-3=1$
또, $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$에서 ($\because\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \ge 0$에서 양 변에 $3(xy+yz+zx)$를 더한다)
$4 \ge 3(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 1 < xy+yz+zx \le \frac{4}{3}$

21. 좌표평면 위의 점 A(3, 2)를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0, b>0)$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, △OBC 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ $2\sqrt{6}$

해설



△OBC 의 넓이를 S 라 하면 $S=\frac{1}{2}ab$, A(3,2)는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 위의 점이므로

$$1=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\ge 2\sqrt{\frac{3}{a}\times\frac{2}{b}}=2\sqrt{\frac{3}{S}}$$

양변을 제곱하면 $1\ge\frac{12}{S}$ $\quad\therefore S\ge 12$

따라서 △OBC 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

22. 양수 x에 대하여 $8x^2 + \dfrac{2}{x}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$　② $2\sqrt[3]{3}$　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$x > 0$이므로

$$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$$

(단, 등호는 $x = \dfrac{1}{2}$일 때 성립)

23. 양수 x에 대하여 $\dfrac{x^2+2x+2}{x}$는 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, $-2a+b+1$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x>0$이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x}=x+2+\frac{2}{x}$$

$$x+\frac{2}{x}+2\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}+2=2\sqrt{2}+2$$

(단, 등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2}+2$이므로 $b=2\sqrt{2}+2$

등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립하므로 $a=\sqrt{2}$

따라서 $-2a+b+1=-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+2)+1=3$

24. 제곱의 합이 일정한 두 실수 a, b에 대하여 $a+2b$가 최대일 때, a와 b사이의 관계는?

① $b=2a$　　② $a=2b$　　③ $a=b$

④ $a^2=b$　　⑤ $b^2=a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a+2b)^2 \leq (1^2+2^2)(a^2+b^2)$

$\therefore\ (a+2b)^2 \leq 5c$

이 때, 등호는 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}$일 때 성립

$\therefore\ b=2a$

25. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore \; -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore \; M=10,\; m=-10$

$\therefore \; M-m=10-(-10)=20$