

1. 좌표평면 위의 세 점 A(2, 0), B(3, a), C(4, 2)에 대하여 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} = \overline{BC} &\text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{ 이므로} \\ (3-2)^2 + (a-0)^2 &= (4-3)^2 + (2-a)^2 \\ 1 + a^2 &= 1 + 4 - 4a + a^2 \\ 4a &= 4 \quad \therefore a = 1\end{aligned}$$

2. 세 점 A(2, 1), B(4, 3), C(a, 0)에 대하여 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 가 성립할 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\overline{AC} = \sqrt{(a-2)^2 + 1^2}, \overline{BC} = \sqrt{(a-4)^2 + 3^2}$$

$$\overline{AC} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$(a-2)^2 + 1 = (a-4)^2 + 9$$

$$4a = 20$$

$$\therefore a = 5$$

3. 두 점 A(2, 3), B(6, 1)이 있다. 점 P가 x 축 위에 있을 때, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하면?

① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

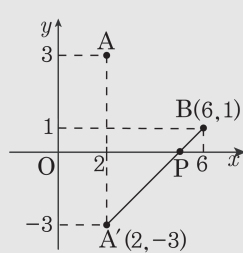
(2, 3)을 x 축에 대해

대칭이동한 점을

A'(2, -3)라 하면

최단거리는 $\overline{A'B}$ 의 길이

$$\therefore \sqrt{(2-6)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$



4. 두 점 A(2, 0), B(-2, 4) 에 대하여 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표를 구하면?

- ① (2, 2) ② (0, 2) ③ (4, 4) ④ (0, 0) ⑤ (4, 1)

해설

$$\overline{AB} \text{ 의 중점은 } \left(\frac{2 + (-2)}{2}, \frac{0 + 4}{2} \right) = (0, 2)$$

5. 두 점 A(2,0) , B(5,3) 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점을 P ,
2 : 1로 외분하는 점을 Q 라고 할 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 구하면?

① $2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}$ ③ 10 ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$P = \left(\frac{2 \times 5 + 1 \times 2}{3}, \frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{3} \right) = (4, 2)$$

$$Q = \left(\frac{2 \times 5 - 1 \times 2}{2 - 1}, \frac{2 \times 3 - 1 \times 0}{2 - 1} \right) = (8, 6)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

6. 두 점 $A(a, 4)$, $B(1, b)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 P , y 축 위의 점을 Q 라 하면, $\triangle OPQ$ 의 무게중심은 $G(-1, 1)$ 이다. 이때, $a - b$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$P(x, 0)$, $Q(0, y)$ 라 하면,

$$\frac{0+x+0}{3} = -1, \frac{0+0+y}{3} = 1 \text{에서}$$

$$x = -3, y = 3$$

$$\therefore P(-3, 0), Q(0, 3)$$

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \text{에서}$$

$$(a+3)^2 + 4^2 = (1+3)^2 + b^2$$

$$a^2 + 6a + 9 = b^2$$

$$\overline{QA}^2 = \overline{QB}^2 \text{에서}$$

$$a^2 + (4-3)^2 = 1^2 + (b-3)^2$$

$$a^2 = b^2 - 6b + 9$$

두 식을 변변 빼고 정리하면 $a - b = -3$

7. 직선 $(a+2)x - y - a + b = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 45° 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = (a+2)x - a + b$ 에서
기울기 $= a+2 = \tan 45^\circ = 1$
 $\therefore a = -1$
 y 절편 $-a + b = 4$
 $\therefore b = 3$
 $\therefore a + b = 2$

8. 점 $(a+b, ab)$ 가 제 2사분면의 점일 때, $(a, a+b)$ 는 제 $\square$ 사분면, 점 $\left(\frac{b}{a}, b\right)$ 는 제 $\square$ 사분면의 점이다. 다음 중 $\square$ 안에 들어갈 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① 1, 2 ② 2, 3 ③ 3, 4 ④ 1, 4 ⑤ 3, 2

해설

점 $(a+b, ab)$ 가 제 2사분면의 점이므로

$$a+b < 0, ab > 0$$

$$\therefore a < 0, b < 0$$

$$\therefore a+b < 0, \frac{b}{a} > 0$$

따라서 점 $(a, a+b)$ 는 제 3사분면의 점이고

점 $\left(\frac{b}{a}, b\right)$ 는 제 4사분면의 각이다.

9. 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. 선분 AB 의 중점이 (2, 3) 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 에서

$y = 0$ 일 때 $x = a$, $x = 0$ 일 때, $y = b$

A(a , 0), B(0, b)

한편 선분 AB 의 중점이 (2, 3) 이므로

$$\frac{a+0}{2} = 2, \frac{0+b}{2} = 3$$

$$\therefore a = 4, b = 6$$

$$\therefore a + b = 10$$

10. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$ $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$ 가 일직선 위에 있을 때, k 의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2 + 7k + 12 = 0$
 $\therefore k$ 의 값의 곱은 12이다.

11. 상수 a, b, c 가 조건 $ab > 0, bc < 0$ 을 만족시킬 때 방정식 $ax+by-c=0$ 이 나타내는 그래프가 지나는 사분면을 모두 고르면?

① 제 1, 2, 3 사분면

② 제 2, 3, 4 사분면

③ 제 1, 3, 4 사분면

④ 제 1, 2 사분면

⑤ 제 2, 3 사분면

해설

$$ax+by-c=0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

$ab > 0, bc < 0$ 이므로

기울기는 (-), y절편은 (-)이다.

$\therefore$ 제 2,3,4사분면을 지난다.

12. 다음 중 직선 $2x - 3y - 5 = 0$ 에 수직이고 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 직선 위에 있는 점은?

① $(3, -2)$

② $(3, -3)$

③ $(3, -4)$

④ $(3, -5)$

⑤ $(3, -6)$

해설

주어진 직선의 기울기가 $\frac{2}{3}$ 이므로

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 1)$$

$$\therefore 3x + 2y - 1 = 0$$

그러므로 이 직선 위에 있는 점은 점 $(3, -4)$ 이다.

13. 두 점 A(-2, -1), B(4, 3) 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

선분 AB의 중점의 좌표는 (1, 1)

선분 AB의 기울기는 $\frac{3 - (-1)}{4 - (-2)} = \frac{2}{3}$

따라서, 선분 AB의 수직이등분선은 점 (1, 1)을 지나고, 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$

즉, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

따라서, $a + b = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$

14. 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점 (a, b) 와 직선 $x - y + 1 = 0$ 사이의 거리가 최소가 될 때, $4(a + b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

(a, b) 가 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점이고,
또 점 (a, b) 와 직선 사이의 거리를 l 이라 하면,

$$a = b^2 + 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$l = \frac{|a - b + 1|}{\sqrt{2}} \dots\dots \textcircled{2}$$

①를 ②에 대입하면

$$l = \frac{|b^2 - b + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\left| \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right|}{\sqrt{2}}$$

∴ $b = \frac{1}{2}$ 일 때 l 이 최소가 된다.

따라서 $a + b = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$ 이므로

$$\therefore 4(a + b) = 7$$

15. 중심이 $(2, -1)$ 이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원의 방정식은?

① $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$

② $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{5}$

③ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

④ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{5}$

⑤ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5^2$

해설

중심이 $(2, -1)$, $r : \sqrt{5}$ 인 원

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

16. 방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$ 은 어떤 도형을 나타내는가?

- ① 중심이 (2, 1) 이고 반지름의 길이가 1 인 원
- ② 중심이 (2, -1) 이고 반지름의 길이가 2 인 원
- ③ 중심이 (-2, 1) 이고 반지름의 길이가 2 인 원
- ④ 중심이 (2, -1) 이고 반지름의 길이가 4 인 원
- ⑤ 중심이 (-2, 1) 이고 반지름의 길이가 4 인 원

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 &= 0 \\ \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= 16 \\ \therefore \text{중심은 } (2, -1) \text{ 이고,} \\ \text{반지름은 } 4 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

17. 두 원 $x^2 + y^2 - 2 = 0$, $x^2 + y^2 + kx - 4y - 1 = 0$ 의 교점을 지나는 직선이 $x + 2y + 1 = 0$ 과 평행일 때, k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2 - (x^2 + y^2 + kx - 4y - 1) = 0$$

$$\therefore kx - 4y + 1 = 0$$

이 직선이 직선 $x + 2y + 1 = 0$ 과 평행하므로

$$\frac{k}{1} = \frac{-4}{2} \neq \frac{1}{1}$$

$$\therefore k = -2$$

18. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = r^2$ 의 공통접선이 모두 4 개가 되도록 하는 자연수 r 의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 원의 공통접선이 4 개가 되려면 두 원의 위치 관계는 서로 다른 원의 외부에 있어야 한다.

이 때, $x^2 + y^2 = 1$ 은 중심이 $(0, 0)$,

반지름의 길이가 1 인 원이고

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = r^2$ 은 중심이 $(3, -4)$,

반지름의 길이가 r 인 원이므로

$$\sqrt{3^2 + (-4)^2} > 1 + r$$

$$5 > 1 + r$$

$$\therefore 0 < r < 4$$

따라서, 자연수 r 은 1, 2, 3 으로 모두 3 개이다.

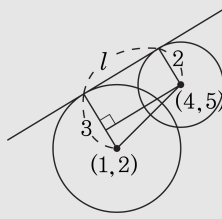
19. 두 원 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$, $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$ 의 공통접선의 길이는?

① 4 ② $\sqrt{17}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{19}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

두 원의 중심거리와 반지름의 차를 이용하여 구한다.

$$\therefore l = \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2} - 1 = \sqrt{17}$$



20. 반지름의 길이가 10, 중심좌표가 $O(0, 0)$ 인 원 밖의 한 점 $P(11, 12)$ 에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 지나는 직선을 극선이라고 한다. 이 극선의 방정식이 $px + qy = 100$ 일 때, $p + q$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

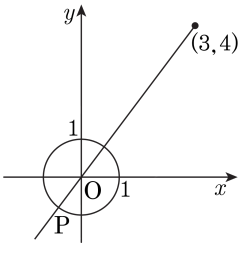
원 위의 두 접점을 $Q_1(a_1, b_1)$, $Q_2(a_2, b_2)$ 라 하면
각각의 접선의 방정식은 $a_1x + b_1y = 100$, $a_2x + b_2y = 100$ 이고
두 직선은 동시에 $P(11, 12)$ 를 지나므로
 $11a_1 + 12b_1 = 100$, $11a_2 + 12b_2 = 100$ 이 함께 성립한다.
이것은 $11x + 12y = 100$ 위에 두 점 $Q_1(a_1, b_1)$,
 $Q_2(a_2, b_2)$ 가 동시에 있는 것을 의미하므로
직선 Q_1, Q_2 의 방정식은
 $11x + 12y = 100$ 이다.
따라서 $p = 11$, $q = 12$ $\therefore p + q = 23$

21. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $P(a, b)$ 에 대하여 $\sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2}$ 의 최댓값은?

- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ $1 + \sqrt{5}$
- ⑤ $2(1 + \sqrt{5})$

해설

$\sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2}$ 은 두 점 (a, b) , $(3, 4)$ 사이의 거리이고 점 (a, b) 는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로 $\sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2}$ 의 값이 최대인 경우는 점 P 의 위치가 그림과 같을 때이다. 원의 중심 $(0, 0)$ 과 $(3, 4)$ 의 거리는 5 이므로 최댓값은 $5 + 1 = 6$



22. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x+a, x+b)$ 에 의해 점 $(1, 2)$ 가 점 $(-1, 4)$ 으로 옮겨질 때, 평행이동 f 에 의해 원점으로 옮겨지는 점의 좌표는?

① $(2, -2)$

② $(2, 2)$

③ $(2, 0)$

④ $(-2, 2)$

⑤ $(4, 2)$

해설

$$(1+a, 2+b) = (-1, 4)$$

$$\Rightarrow a = -2, \quad b = 2$$

$$\therefore (x+2, y+2) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow x = 2, \quad y = -2$$

$$\Rightarrow (2, -2)$$

23. 원 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + (2 - b)x + (2a - 4)y = 0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

원 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 을
 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $(-x)^2 + y^2 + a(-x) + by = 0$
즉, $x^2 + y^2 - ax + by = 0$
이것이 $x^2 + y^2 + (2 - b)x + (2a - 4)y = 0$ 과
같으므로 계수를 비교하면
 $-a = 2 - b, b = 2a - 4$
두 식을 연립하여 풀면 $a = 6, b = 8$
 $\therefore a + b = 6 + 8 = 14$

24. 원 $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$ 을 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭 이동하면 원 $x^2 + y^2 = c$ 가 된다고 한다. 이 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① -15 ② -13 ③ 12 ④ 17 ⑤ 22

해설

$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 20$
 $y = ax + b$ 와 $(4, 2)$ $(0, 0)$
선분은 서로 수직하므로
 $\frac{-2-0}{4-0} \times a = -1$
 $\therefore a = 2$
 $y = ax + b$ 는 $(4, -2)$ 와 $(0, 0)$ 의 중점을 지나므로
 $\left(\frac{4+0}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = (2, -1)$
 $-1 = 2a + b$
 $\therefore b = -5$ ($\because a = 2$)
원을 대칭해도 반지름은 변하지 않으므로
 $\therefore c = 20$
 $\therefore a + b + c = 2 - 5 + 20 = 17$

25. 좌표평면 위의 두 점 A (5, 1), B (8, 5) 와 y 축 위의 점 C 를 꼭짓점으로 하는 △ABC 의 둘레의 길이의 최솟값이 $5 + \sqrt{a}$ 일 때, a 의 값은?

- ① 180 ② 185 ③ 190 ④ 195 ⑤ 200

해설

점 A (5, 1) 을 y 축에 대하여
대칭 이동한 점을 A' 이라 하면

A' (-5, 1)

또, 다음 그림에서 $\overline{AC} = \overline{A'C}$ 이므로

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$$

$$= \sqrt{(8-5)^2 + (5-1)^2} + \overline{BC} + \overline{A'C}$$

$$\geq 5 + \overline{A'B}$$

$$= 5 + \sqrt{\{8-(-5)\}^2 + (5-1)^2}$$

$$= 5 + \sqrt{185}$$

$$\therefore a = 185$$

