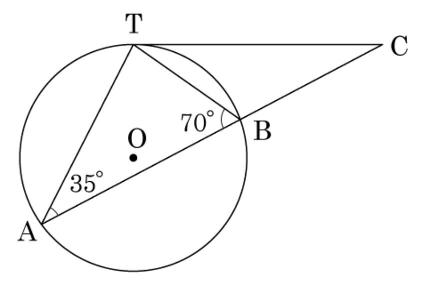
1. 다음 그림에서 $\overline{TC}$ 는 원 O 의 접선이다. $\angle TAB = 35°$, $\angle ABT = 70°$일 때, $\angle C$의 크기는?



① $25°$ ② $30°$ ③ $35°$ ④ $40°$ ⑤ $45°$

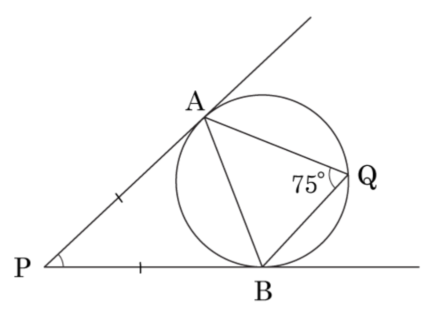
해설

$\angle BAT = \angle BTC = 35°$

$\angle TCB + \angle CTB = \angle TCB + 35° = 70°$

$\therefore \angle TCB = 35°$

2. 다음 그림에서 두 직선 PA, PB 는 원의 접선이고 $\angle AQB = 75°$ 일 때, $\angle APB$ 의 크기는?

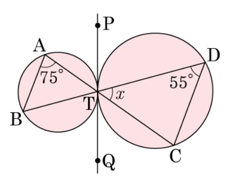


① 30° ② 40° ③ 50° ④ 60° ⑤ 70°

해설

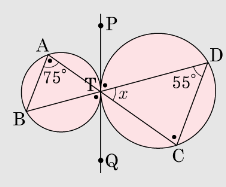
$\angle ABP = \angle AQB = 75°$ 이고 $\triangle PAB$ 는 이등변삼각형이므로
$\angle APB = 180° - 75° - 75° = 30°$

3. 다음 그림에서 두 원이 점 T 에서 서로 접하고 $\angle BAT = 75°$, $\angle CDT = 55°$ 일 때, $\angle CTD$ 의 크기는?



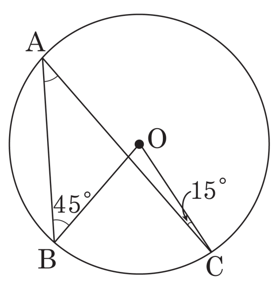
① 45°　② 50°　③ 55°　④ 65°　⑤ 75°

해설



접선과 현이 이루는 각의 성질과 맞꼭지각의 성질에 따라
$\angle DCT = 75°$, $\triangle DCT$ 에서 $\therefore x = 180° - 75° - 55° = 50°$

4. 다음 그림에서 $\angle ABO = 45°$, $\angle ACO = 15°$일 때, $\angle BAC$의 크기는?



① $15°$ ② $20°$ ③ $28°$

④ $30°$ ⑤ $35°$

해설

$\triangle AOC$ 가 이등변삼각형이므로 $\angle CAO = 15°$

작은 쪽의 $\angle AOC = 150°$, 큰 쪽의 $\angle AOD = 210°$

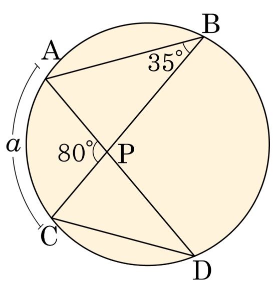
$\angle ABC = 210 \times \frac{1}{2} = 105°$ $\therefore\ \angle OBC = 60°$

$\triangle OBC$는 이등변삼각형이므로

$\angle OCB = 60°$, $\angle ACB = 45°$

$\therefore\ \angle BAC = 180° - 45° - 60° - 45° = 30°$

5. 다음 그림에서 5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{AC}} = a$ 일 때, 5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$ 를 구하면?



① $\frac{6}{5}a$　② $\frac{7}{5}a$　③ $\frac{8}{7}a$
④ $\frac{9}{7}a$　⑤ $\frac{10}{9}a$

해설

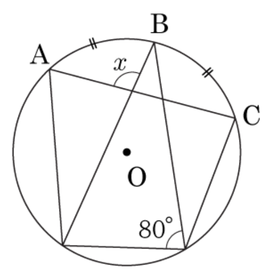
$\triangle$ABP 에 의해 $\angle \mathrm{APC} = \angle \mathrm{ABP} + \angle \mathrm{BAP}$

$\angle \mathrm{BAP} = 80\,° - 35\,° = 45°$

5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$: 5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{BC}} = 35° : 45° = a :$ 5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$

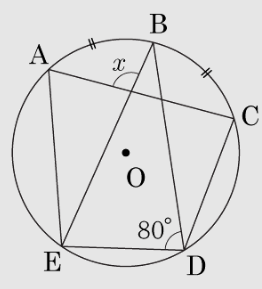
5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{BD}} = \frac{45\,°}{35\,°} = \frac{9}{7}a$

6. 다음 그림과 같이 원 O 위의 점 A, B, C 가 있다. $\angle x$ 의 크기는? (단, 5.0pt$\overset{\frown}{AB}$ = 5.0pt$\overset{\frown}{BC}$)



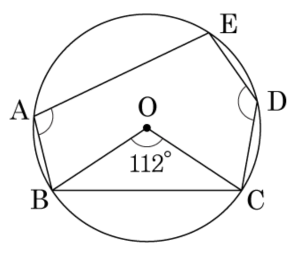
① 100°　② 110°　③ 120°
④ 130°　⑤ 140°

해설



다음 그림에서 점 D, E 를 잡으면 $\angle BDC = \angle BEA$ 이다.
내접사각형 AEDC 에서 $\angle A + \angle EDC = 180^\circ$ 이므로 $x = \angle A + \angle BEA = \angle A + \angle BDC = 100^\circ$ 이다.

7. 다음 그림에서 오각형 ABCDE 는 원 O 에 내접하고 $\angle BOC = 112°$ 일 때, $\angle A + \angle D$ 의 크기는?



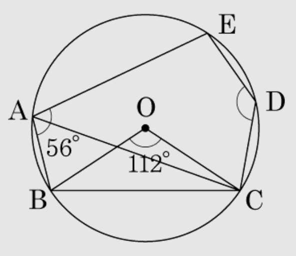
① $252°$ ② $236°$ ③ $212°$ ④ $186°$ ⑤ $164°$

해설

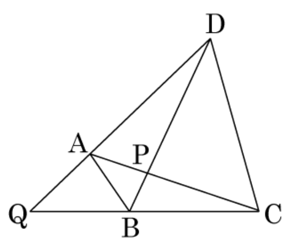
점 A 와 점 C 에 보조선을 그으면

$\angle D + \angle EAC = 180°$, $\angle BAC = \frac{1}{2} \times \angle BOC = 112° = 56°$

$\therefore \angle A + \angle D = 180° + 56° = 236°$



8. 다음 조건을 만족할 때, □ABCD 가 원에 내접하지 않는 것은?



① $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$

② $\overline{QA} \times \overline{QD} = \overline{QB} \times \overline{QC}$

③ $\angle BAC = \angle BDC$

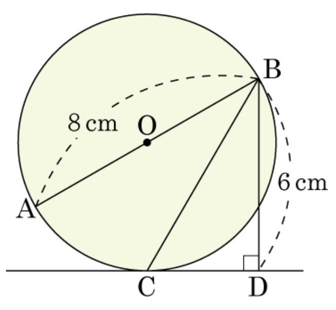
④ $\angle ABQ = \angle ADC$

⑤ $\angle ABC + \angle ADC = 180°$

해설

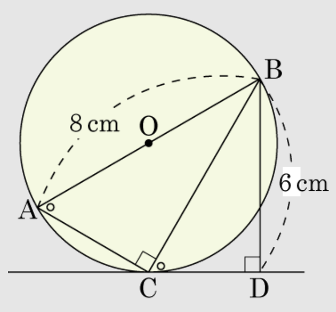
□ABCD 가 원에 내접하려면
$\overline{PA} \times \overline{PC} = \overline{PB} \times \overline{PD}$ 이어야 한다.

9. 다음 그림에서 $\overleftrightarrow{CD}$ 는 원 O 의 접선이다. $\overline{AB}$ 가 원의 지름이고 $\overline{CD}\perp\overline{BD}$ 일 때, $\overline{AC}$ 의 길이는?



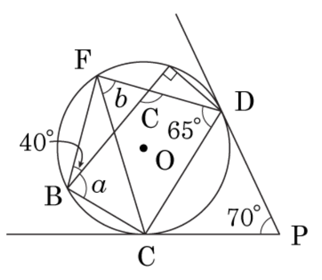
① 2cm　　② 4cm
③ $2\sqrt{3}$cm　　④ $3\sqrt{2}$cm
⑤ $4\sqrt{2}$cm

해설



$\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = \angle BCD$ 이므로
$\triangle ABC \backsim \triangle CBD$ (AA 닮음)
$\therefore\ 8 : \overline{BC} = \overline{BC} : 6$
$\overline{BC}^2 = 48$, $\overline{BC} = 4\sqrt{3}$ cm
$\therefore\ \overline{AC} = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4$ cm

10. 다음 그림에서 두 반직선은 원 O의 접선이다. $\angle BAD = 90°, \angle EDC = 65°, \angle EBF = 40°, \angle CPD = 70°$ 일 때, $\angle a + \angle b + \angle c$ 의 크기는?



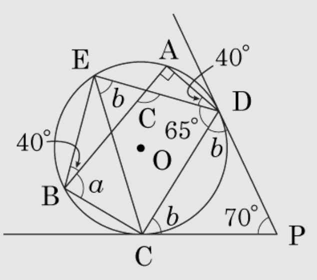
① $240°$ ② $245°$ ③ $255°$ ④ $260°$ ⑤ $320°$

해설

1) 사각형 EBCD 가 원에 내접하므로 $\angle a + 40° + 65° = 180°$ ∴ $\angle a = 75°$

2) 접선과 현이 이루는 각의 크기는 그 내부의 호에 대한 원주각의 크기와 같으므로

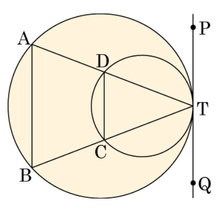
$\angle b = \angle PDC = \angle PCD = 55°$ ($\because \overline{PD} = \overline{PC}$)



3) $\triangle ADE$ 에서 $\angle c = 90° + 40° = 130°$ (이 때, $\overset{\frown}{AF}$ 에 대한 원주각으로 $\angle FBA = \angle ADF = 40°$)

따라서, $\angle a + \angle b + \angle c = 75° + 55° + 130° = 260°$ 이다.

11. 다음 그림과 같이 점 T 는 두 원의 공통 접점이고 $\overleftrightarrow{PQ}$ 는 두 원의 공통인 접선이다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

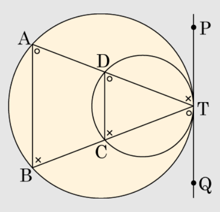


① $\overline{AB}//\overline{CD}$ ② $\angle BAT = \angle CDT$

③ $\overline{TA}:\overline{TB}=\overline{TC}:\overline{TD}$ ④ $\angle ABT = \angle ATP$

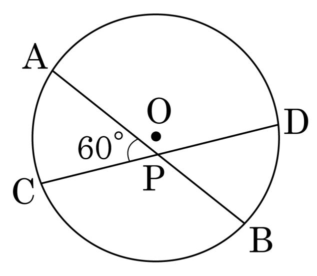
⑤ $\triangle ATB \sim \triangle DTC$

해설



직선 PQ 가 두 원의 공통접선이고, 접선과 현이 이루는 각의 성질에 따라 그림처럼 같은 각의 관계가 성립한다.
따라서, 동위각이 같으므로 $\overline{AB}//\overline{CD}$ 이고 $\triangle ATB \sim \triangle DTC$ 이므로 $\overline{TA}:\overline{TB}=\overline{TD}:\overline{TC}$ 이다.

12. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 10 인 원 O 에서 $\angle \mathrm{APC} = 60°$ 일 때, 5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ + 5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{BD}}$ 의 값은?



① $\frac{5}{3}\pi$　② $\frac{10}{3}\pi$　③ $\frac{15}{3}\pi$　④ $\frac{20}{3}\pi$　⑤ $\frac{25}{3}\pi$

해설

$\angle \mathrm{ADC} + \angle \mathrm{DAB} = 60°$

5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ + 5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{BD}} = \frac{60°}{180°} \times 20\pi = \frac{20}{3}\pi$

13. 세 수 $x,\ y,\ z$ 의 평균과 분산이 각각 4, 2 일 때, $x^2,\ y^2,\ z^2$ 의 평균은?

① $\frac{50}{3}$ ② $\frac{51}{3}$ ③ $\frac{52}{3}$ ④ $\frac{53}{3}$ ⑤ 18

해설

세 수 $x,\ y,\ z$ 의 평균이 4 이므로

$\frac{x+y+z}{3}=4$

$\therefore\ x+y+z=12\ \ \cdots\cdots$ ㉠

또한, $x,\ y,\ z$ 의 분산이 2 이므로

$\frac{(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2}{3}=2$

$(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=6$

$x^2-8x+16+y^2-8y+16+z^2-8z+16=6$

$x^2+y^2+z^2-8(x+y+z)+48=6$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$x^2+y^2+z^2-8\times 12+48=6$

$\therefore x^2+y^2+z^2=54$ 따라서 $x^2,\ y^2,\ z^2$ 의 평균은

$\frac{x^2+y^2+z^2}{3}=\frac{54}{3}=18$ 이다.

14. 세 수 x, y, z 의 평균과 분산이 각각 5, 3 일 때, $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{2}y^2$, $\frac{1}{2}z^2$ 의 평균은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

세 수 x, y, z 의 평균이 5 이므로

$\frac{x+y+z}{3}=5$

$\therefore x+y+z=15$ ……㉠

또한, x, y, z 의 분산이 3 이므로

$\frac{(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2}{3}=3$

$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=9$

$x^2-10x+25+y^2-10y+25+z^2-10z+25=9$

$x^2+y^2+z^2-10(x+y+z)+75=9$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$x^2+y^2+z^2-10\times15+75=9$

$\therefore x^2+y^2+z^2=84$

따라서 $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{2}y^2$, $\frac{1}{2}z^2$ 의 평균은

$\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right)=\frac{1}{6}(x^2+y^2+z^2)=\frac{84}{6}=14$ 이다.

15. 다섯 개의 변량 5, 6, x, y, 7 의 평균이 8 이고, 분산이 5 일 때, 2, 3, $\frac{1}{5}x^2$, $\frac{1}{5}y^2$ 의 평균은?

① 5　　② 7　　③ 9　　④ 11　　⑤ 13

해설

다섯 개의 변량 5, 6, x, y, 7 의 평균이 8 이므로

$\frac{5+6+x+y+7}{5}=8,\quad x+y+18=40$

$\therefore x+y=22 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, 분산이 5 이므로

$\frac{(5-8)^2+(6-8)^2+(x-8)^2+(y-8)^2}{5}+\frac{(7-8)^2}{5}=5$

$\frac{9+4+x^2-16x+64+y^2-16y+64+1}{5}=5$

$\frac{x^2+y^2-16(x+y)+142}{5}=5$

$x^2+y^2-16(x+y)+142=25$

$\therefore x^2+y^2-16(x+y)=-117 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 식에 ㉠을 대입하면

$x^2+y^2=16(x+y)-117=16\times 22-117$

$\therefore\ x^2+y^2=235$

따라서 1, 2, $\frac{1}{5}x^2$, $\frac{1}{5}y^2$ 의 평균은

$\frac{1}{4}\left(2+3+\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{5}\right)=\frac{1}{4}\left\{5+\frac{1}{5}(x^2+y^2)\right\}=13$ 이다.

16. 세 수 $x,\ y,\ z$ 의 평균과 분산이 각각 3, 4 일 때, $x-1,\ y-1,\ z-1$ 의 평균과 표준편차를 차례대로 구하여라.

① 2, 2　② 3, 5　③ 4, 4　④ 5, 4　⑤ 6, 5

해설

세 수 $x,\ y,\ z$ 의 평균이 3 이므로

$$\frac{x+y+z}{3}=3$$

$\therefore x+y+z=9$ ……㉠

또한, $x,\ y,\ z$ 의 분산이 4 이므로

$$\frac{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2}{3}=4$$

$$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=12$$

$$x^2-6x+9+y^2-6y+9+z^2-6z+9=12$$

$$x^2+y^2+z^2-6(x+y+z)+27=12$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$x^2+y^2+z^2-6\times 9+27=12$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2=39$$

한편, $x-1,\ y-1,\ z-1$ 의 평균은

$$\frac{(x-1)+(y-1)+(z-1)}{3}$$

$$=\frac{(x+y+z)-3}{3}=\frac{9-3}{3}=2$$

분산은

$$\frac{(x-1-2)^2+(y-1-2)^2+(z-1-2)^2}{3}$$

$$=\frac{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2}{3}$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2-6(x+y+z)+9\times 3}{3}$$

$$=\frac{39-6\times 9+27}{3}=\frac{12}{3}=4$$

따라서 $x-1,\ y-1,\ z-1$ 의 표준편차는 $\sqrt{4}=2$ 이다.

17. 세 수 $a,\ b,\ c$ 의 평균이 2 , 분산이 4 일 때, 변량 $a+3,\ b+3,\ c+3$ 의 평균과 분산을 차례대로 나열한 것은?

① 2, 5 ② 3, 5 ③ 4, 4 ④ 5, 4 ⑤ 6, 5

해설

세 수 $a,\ b,\ c$ 의 평균이 2 이므로

$$\frac{a+b+c}{3}=2$$

$\therefore a+b+c=6\ \cdots\cdots$ ㉠

또한, $a,\ b,\ c$ 의 분산이 4 이므로

$$\frac{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{3}=4$$

$$(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=12$$

$$a^2-4a+4+b^2-4b+4+c^2-4c+4=12$$

$$a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)+12=12$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$a^2+b^2+c^2-4\times6+12=12$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=24$$

한편, $a+3,\ b+3,\ c+3$ 의 평균은

$$\frac{(a+3)+(b+3)+(c+3)}{3}=\frac{(a+b+c)+9}{3}$$

$$=\frac{6+9}{3}=5$$

따라서 분산은

$$\frac{(a+3-5)^2+(b+3-5)^2+(c+3-5)^2}{3}$$

$$=\frac{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{3}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)+4\times3}{3}$$

$$=\frac{24-4\times6+12}{3}=\frac{12}{3}=4$$

18. 자연수 a, b, c에 대하여 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ 인 직육면체의 부피가 $6\sqrt{5}$일 때, 이 직육면체의 겉넓이의 최댓값을 구하여라. (단, $a \le b \le c$)

① $1+2\sqrt{5}$　② $2+\sqrt{3}$　③ $2+12\sqrt{3}$

④ $2+21\sqrt{5}$　⑤ $2+24\sqrt{5}$

해설

부피는 $\sqrt{abc} = 6\sqrt{5} = \sqrt{180}$

$\therefore\ abc = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

한편 직육면체의 겉넓이는

$2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$ 이고

$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$가 최댓값을 갖기 위한 자연수 a, b, c의 순서쌍은 $(1,\ 1,\ 180)$ 이므로

$$\begin{aligned}\therefore \text{(직육면체의 겉넓이)} &= 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \\ &= 2(1+\sqrt{180}+\sqrt{180}) \\ &= 2(1+6\sqrt{5}+6\sqrt{5}) \\ &= 2(1+12\sqrt{5}) \\ &= 2+24\sqrt{5}\end{aligned}$$