

1. 두 점 A(1, 2), B(-2, 6) 사이의 거리는?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{1 - (-2)^2 + (2 - 6)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$

2. 점 $(3, -5)$ 와 직선 $4x - 3y - 12 = 0$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$d = \frac{|4 \times 3 + (-3) \times (-5) + (-12)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 3$$

3. 직선 $y = 2x + 3$ 을 x 축의 방향으로 p , y 축의 방향으로 $-2p$ 만큼 평행이동하였더니 직선 $y = 2x - 5$ 와 일치하였다. 이때, 상수 p 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선을 x 축으로 p , y 축으로 $-2p$ 만큼 평행이동하면,

$$\Rightarrow y + 2p = 2(x - p) + 3$$

$$\Rightarrow y = 2x - 4p + 3$$

$$\Rightarrow -4p + 3 = -5$$

$$\therefore p = 2$$

4. 점 $(-2, 5)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 후, 다시 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 점 (a, b) 가 된다. 이 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

점 $(-2, 5)$ 를 원점에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(2, -5)$ 이고,
이 점을 다시 x 축의 방향으로 3 만큼,
 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면
 $(2 + 3, -5 - 2) = (5, -7) = (a, b)$
따라서, $a = 5$, $b = -7$ 이므로
 $a - b = 12$

5. 두 점 A(-1, 4), B(6, 3) 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P(a, b)
라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

P = ($a, 0$) 이므로 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서
 $(a + 1)^2 + 4^2 = (a - 6)^2 + 9$, $a = 2$
 $\therefore$ P = (2, 0)
 $a + b = 2$

6. $ac < 0, bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,
 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots \textcircled{1}$
 $ac < 0, bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$
 $\therefore abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$
 $ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$
 $bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$
따라서 $\textcircled{1}$ 은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

7. 두 직선 $x + y - 4 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ 의 교점과 점 $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -28$

해설

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \text{ 을 연립하면}$$

교점 : $(1, 3) \Rightarrow (1, 3), (2, -1)$ 을 지나는 직선

$$y = \frac{-1 - 3}{2 - 1}(x - 1) + 3$$

$$\Rightarrow y = -4x + 7$$

$$\therefore a = -4, b = 7$$

$$\therefore ab = -28$$

8. 두 직선 $y = |x| + 2$ 와 $y = ax + 1 - 2a$ 의 그래프가 교점을 갖지 않을
정수 a 의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\begin{cases} y = |x| + 2 \cdots \textcircled{A} \\ y = ax + 1 - 2a \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

②에서 $a(x - 2) + 1 - y = 0$

즉, a 의 값에 관계없이 정점 $(2, 1)$ 을 지난다.

그림에서 교점을 갖지 않으려면

$(0, 2), (2, 1)$ 을 지나는 직선의 기울기

$\left(-\frac{1}{2}\right)$ 보다 크고

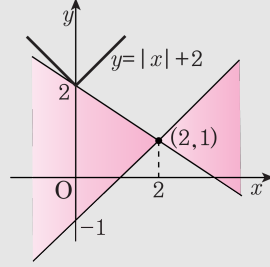
$(0, -1), (2, 1)$ 을 지나는 직선의 기울기

기

1 보다 작거나 같아야 한다.

$$\therefore -\frac{1}{2} < a \leq 1$$

$$\therefore a = 0, a = 1$$



9. 두 원 $x^2 + y^2 = a^2$, $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$ 가 만나지 않을 조건은?
(단, $a > 0$)
- ① $0 < a < 3$
- ② $3 < a < 7$
- ③ $a > 7$
- ④ $0 < a < 3$ 또는 $a > 7$
- ⑤ $2 < a < 7$ 또는 $a > 7$

해설

두 원의 중심이 각각 $(0, 0)$, $(3, -4)$ 이므로

두 원의 중심거리 d 는 $d = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

(i) 두 원이 서로 외부에 위치할 때

$$d = 5 \geq a + 2$$
$$d = 5 > d +$$

$$: 0 \leq a \leq 2$$
$$\therefore 0 < a < 3$$

(ii) 한 원이 다

$$d = 5 < |a - 2|$$
$$\therefore a > 7 (\because a > 0)$$

10. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-2 < k < 2$ ② $0 < k < 4$ ③ $-4 < k < 0$
④ $-2 < k < 0$ ⑤ $-4 < k < 4$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 를 구하면

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$ 이고

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \therefore -4 < k < 4$$

11. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(2, -1)$ 에서 접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -12 ② -11 ③ -10 ④ -5 ⑤ -2

해설

접점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x - y = 5$$

$$\Rightarrow y = 2x - 5 \quad \therefore ab = -10$$

12. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $G(2, -1)$ 이고 세 변 AB, BC, CA를 2 : 1로 내분하는 점이 각각 $P(a, 3)$, $Q(-2, -2)$, $R(5, b)$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

삼각형 ABC의 무게중심과 삼각형 PQR의 무게중심은 일치한다.

삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{a-2+5}{3}, \frac{3-2+b}{3}\right)$ 이므로

$\frac{a+3}{3} = 2$ 에서 $a = 3$

또 $\frac{1+b}{3} = -1$ 에서 $b = -4$

$\therefore a + b = -1$

13. 양 끝점의 좌표가 A(3, 17), B(48, 281)인 선분 AB 위의 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 15 개 ④ 16 개 ⑤ 46 개

해설

선분 AB 의 방정식은

$$y = \frac{88}{15}(x - 3) + 17$$

$$3 \leq x \leq 48$$

이때, y 가 정수이려면,

$x - 3$ 이 15의 배수이어야 한다.

따라서 $x = 3, 18, 33, 48$ 로 모두 4개이다.

문제의 조건을 만족시키는 점의 좌표는

(3, 17), (18, 105), (33, 193), (48, 281)로 모두 4개

14. 다음 두 직선 $y = (2a + 1)x - a + 2$, $y = (a + 2)x + 2$ 가 서로 수직일 때, a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : $-\frac{3}{2}$ 또는 -1.5

해설

$$(2a + 1)(a + 2) = -1$$

$$2a^2 + 5a + 3 = 0$$

$$(2a + 3)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } -\frac{3}{2}$$

15. 두 직선 $ax+y=-3$, $2x+(a-1)y=6$ 이 평행할 때의 a 값을 α , 일치할 때의 a 값을 β 라 할 때, $2\alpha+\beta$ 의 값은?

① -3 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 6

해설

두 직선이 평행하려면 기울기는 같고 y절편이 다르다.

$$\Rightarrow y = -ax - 3, \quad y = -\frac{2}{a-1}x + \frac{6}{a-1}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{a-1}, \quad a = 2, -1 \quad \therefore a = 2$$

두 직선이 일치하려면 기울기, y절편이 같다.

$$\therefore a = -1$$

$$\Rightarrow 2\alpha + \beta = 4 - 1 = 3$$

16. 원점을 지나고, 점(2, 1) 에서의 거리가 2 인 직선의 기울기 m 의 값은?

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $-\frac{5}{4}$

해설

점 $P(x_1, y_1)$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

원점을 지나고, 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$mx - y = 0$$

또한, 점(2, 1) 에서 이 직선까지의 거리가 2이므로,

$$\frac{|2m - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2, \quad |2m - 1| = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면 $4m^2 - 4m + 1 = 4m^2 + 4$,

$$-4m = 3 \therefore m = -\frac{3}{4}$$

17. 두 점 $A(2, 5)$, $B(7, -1)$ 에 대하여 선분 AB 를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점 P 가 제 1 사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는? (단, $0 < t < 1$)

① $0 < t < \frac{1}{3}$

② $0 < t < \frac{3}{5}$

③ $0 < t < \frac{5}{6}$

④ $\frac{3}{5} < t < 1$

⑤ $\frac{3}{5} < t < \frac{5}{6}$

해설

점 P 가 $\overline{AB}$ 를 $t : (1-t)$ 로 내분하므로

$$P\left(\frac{7t + (1-t) \cdot 2}{t + (1-t)}, \frac{-t + (1-t) \cdot 5}{t + (1-t)}\right)$$

$$\therefore P(5t + 2, -6t + 5)$$

점 P 가 제1 사분면에 있으므로 $5t + 2 > 0$ 이고 $-6t + 5 > 0$

$$\therefore -\frac{2}{5} < t < \frac{5}{6}$$

이때, $0 < t < 1$ 이므로 구하는 t 의 값의 범위는

$$\therefore 0 < t < \frac{5}{6}$$

18. 두 정점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 1 : 2 인 점 P 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은 3 이다.
- ㉡ $\angle PBA$ 의 최대 크기는 60° 이다.
- ㉢ 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

- ① ㉠

② ㉠, ㉡

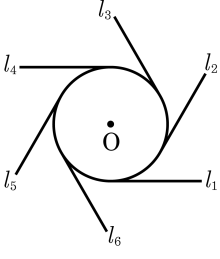
③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 정점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 1 : 2 인 점 P 의 자취는 (0,0) 과 (-4,0) 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다. 따라서 이 원은 $(x+2)^2 + y^2 = 4$ 로 나타낼 수 있다.
삼각형 밑변의 길이가 정해져있으므로 높이가 최대일 때 삼각형의 넓이도 최대가 된다.
따라서 원의 반지름인 2 가 높이일 때의 넓이인 3 이 최댓값이다.
 $\angle PBA$ 의 최대 크기는 점 P 가 원에 접할 때이므로 $\sin(\angle PBA) = \frac{2}{2 - (-2)} = \frac{1}{2}$ 에서 $\angle PBA = 30^\circ$
점 P 의 자취의 방정식은 $(x+2)^2 + y^2 = 4$ 이므로 둘레의 길이는 4π 이다

19. 형중이는 수차 제작을 위해 그림과 같은 설계도를 그리고 있다. $l_1, l_2, \dots, l_6$ 는 원주를 6 등분하는 점에서 원의 접선 방향으로 붙인 날개의 단면이다. 두 접선 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터 원의 중심까지의 거리는 반지름의 몇 배인가?



- ① 2 배 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 배 ③ $3\sqrt{5}$ 배
 ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배 ⑤ 5 배

해설

그림에서 $l_1 : y = -r$ 라 놓으면

$l_2 : y = \sqrt{3}x + k = \sqrt{3}x - 2r$

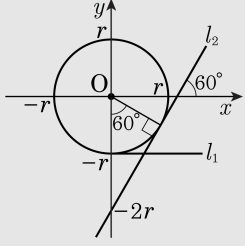
l_2 의 x 절편은 $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ 이고

원의 반지름이 $\cos 30^\circ = \frac{r}{x}$ 이므로

$$x = r \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서, 구하는 l_1 과 l_2 의 연장선의 교점으로부터

원의 중심까지의 거리는 반지름의 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 배이다.



20. 직선 $3x + 4y = 0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접한다. 이 때, 두 양수 a, b 에 대하여 $3a + 4b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

직선 $3x + 4y = 0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼,
 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
 $3(x - a) + 4(y - b) = 0$ 이므로
원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $3x + 4y - 3a - 4b = 0$ 이 접한다.
즉, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선
 $3x + 4y - 3a - 4b = 0$ 까지의 거리가
반지름의 길이 1 과 같다.
 $\therefore \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 - 3a - 4b|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$
 $\therefore |-3a - 4b| = 5$
이 때, a, b 가 양수이므로
 $3a + 4b = 5$ 이다.