1. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(2)$, $\mathrm{Q}(x)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=3$이고, x의 값을 α,β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 26

해설

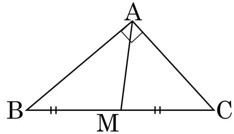
i) $x>2$일 때, $x-2=3 \quad \therefore \ x=5$

ii) $x<2$일 때, $2-x=3 \quad \therefore \ x=-1$

따라서 α,β의 값은 -1 또는 5

$\therefore \ \alpha^2+\beta^2=26$

2. 다음은 $\angle A = 90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$을 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면



$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가)}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{(나)}^2\right)$$

이 때, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고,

$\boxed{(나)} = \boxed{(다)}\overline{BC}$ 이므로

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가)}\left(\boxed{(라)}\overline{BC}^2\right)$$
$$= \overline{BC}^2$$

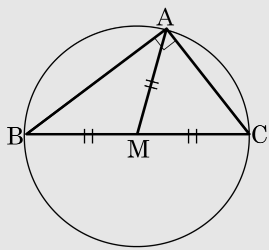
위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 3 , $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ② 4 , $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$
③ 2 , $\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ ④ 2 , $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{16}{5}$, $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$

해설

파푸스의 중선정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{2}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{\overline{AM}}^2\right)$$



이 때, $\triangle ABC$는 $\angle A = 90°$인 직각삼각형이므로 점 A는 점 M을 중심으로 하고, 변 BC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ 이므로 $\boxed{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\frac{\overline{BC}^2}{4} + \frac{\overline{BC}^2}{4}\right)$$
$$= \boxed{2}\left(\boxed{\frac{1}{2}}\overline{BC}^2\right) = \overline{BC}^2$$

3. 두 점 $\mathrm{A}(4, -2)$, $\mathrm{B}(2, 1)$을 이은 선분 AB를 $5:3$으로 외분하는 점 Q에서 원점까지의 거리는?

① $\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $5\sqrt{5}$ ④ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

해설

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{5\cdot 2-3\cdot 4}{5-3}, \dfrac{5\cdot 1-3\cdot(-2)}{5-3}\right)$에서

$\mathrm{Q}\left(-1, \dfrac{11}{2}\right)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{OQ}} = \sqrt{(-1)^2+\left(\dfrac{11}{2}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$$

4. 직선 $y = 2x + 3$ 을 x 축의 방향으로 p , y 축의 방향으로 $-2p$ 만큼 평행이동하였더니 직선 $y = 2x - 5$ 와 일치하였다. 이때, 상수 p 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선을 x 축으로 p , y 축으로 $-2p$만큼 평행이동하면,

$\Rightarrow \quad y + 2p = 2(x - p) + 3$

$\Rightarrow \quad y = 2x - 4p + 3$

$\Rightarrow \quad -4p + 3 = -5$

$\therefore \; p = 2$

5. A(1, 4), B(3, 3) 인 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 (6, 7) 일 때, 꼭짓점 C 의 좌표를 구하면?

① (14, 14) ② (14, 5) ③ (4, 14)

④ (5, 17) ⑤ (6, 20)

해설

C 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 할 때, 무게중심 구하는 공식을 이용하면,

$$\left(\frac{1+3+x}{3},\ \frac{4+3+y}{3}\right)=(6,\ 7)$$

$\therefore\ (x,\ y)=(14,\ 14)$

6. $ab < 0,\ ac > 0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나지 않는 사분면은?

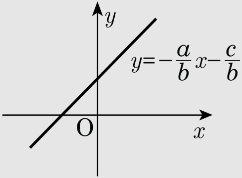
① 제 1, 2 사분면 ② 제 1, 3 사분면 ③ 제 2, 4 사분면

④ 제 2 사분면 ⑤ 제 4 사분면

해설

$ab < 0,\ ac > 0$이므로 $b \neq 0$ 이다.
따라서, 주어진 직선의 방정식을 b로 나누어 정리하면

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$



$$(\text{기울기}) = -\frac{a}{b} > 0$$

한편, $ab < 0,\ ac > 0$이므로

$$ab \cdot ac = a^2bc < 0$$

따라서 $bc < 0$

$$(y \text{ 절편}) = -\frac{c}{b} > 0$$

따라서, 주어진 직선은 제 1, 2, 3 사분면을 지나고 제4 사분면은 지나지 않는다.

7. 두 점 (2, 3), (1, 2)를 지나는 직선 위에 두 직선 $y-3x-4=0$, $y-ax-2=0$의 교점이 있다고 할 때, a의 값을 구하면?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

결국 세 직선의 교점이 일치하므로
두 점 (2, 3), (1, 2)를 지나는
직선과 직선 $y-3x-4=0$의 교점이
직선 $y-ax-2=0$ 위에 있다.
두 점 (2, 3), (1, 2)를 지나는 직선은

$$y-2=\frac{3-2}{2-1}(x-1)$$

$\therefore\ y=x+1$

따라서 두 직선

$y-3x-4=0$과 $y=x+1$의 교점은 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

교점이 $y-ax-2=0$ 위에 있으므로

$$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}a-2=0$$

$\therefore\ a=\frac{5}{3}$

8. 두 직선 $y=|x|+2$ 와 $y=ax+1-2a$ 의 그래프가 교점을 갖지 않을 정수 a 의 개수는?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$$\begin{cases} y=|x|+2 & \cdots ㉠ \\ y=ax+1-2a & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $a(x-2)+1-y=0$

즉, a 의 값에 관계없이 정점 $(2,\ 1)$ 을 지난다.

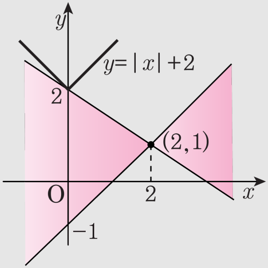
그림에서 교점을 갖지 않으려면

$(0,2),(2,1)$ 을 지나는 직선의 기울기

$\left(-\frac{1}{2}\right)$ 보다 크고

$(0,-1),(2,1)$ 을 지나는 직선의 기울기

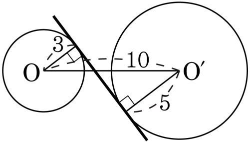
1 보다 작거나 같아야 한다.



$\therefore\ -\frac{1}{2}<a\le 1$

$\therefore a=0,\ \ a=1$

9. 다음 그림의 두 원 O와 O′ 에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3+5)^2} = 6$

10. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

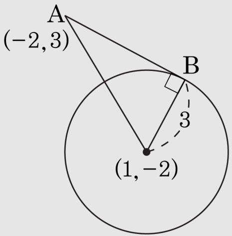
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2}=5$



11. 평행이동 $(x,\ y) \rightarrow (x+2,\ y-1)$에 의하여 점 $(-4,\ 8)$은 점 $(a,\ b)$로 옮겨진다. 이때 $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$(x,\ y) \rightarrow (x+2,\ y-1)$이므로

$(-4,\ 8) \rightarrow (-4+2,\ 8-1) = (-2,\ 7)$

$\therefore\ a+b=5$

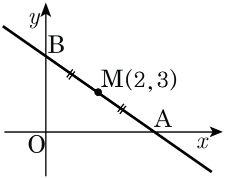
12. 직선 l 이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 두 점 A, B의 중점 M의 좌표는 (2, 3)이다. 이 때, 직선 l의 방정식은?

① $y=-2x+2$ ② $y=-\frac{3}{2}x+3$ ③ $y=-\frac{2}{3}x+2$
④ $y=-\frac{3}{2}x+6$ ⑤ $y=\frac{2}{3}x+6$

해설

A, B의 중점이 (2, 3)이므로
A(4, 0), B(0, 6) 직선 l의 x절편이 4 , y 절편이 6 이므로
직선의 방정식은 $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}+1$이다.

$\therefore\ y=-\frac{3}{2}x+6$



13. 두 직선 $(m+1)x+y=1$, $2x-(m-2)y=1$ 에서 다음 중 옳지 않은 것은?

① 평행일 때 $m=0$

② 일치할 때 $m=1$

③ 수직일 때 $m=-4$

④ 만날 때 $m \neq 2$

⑤ $m \neq 0$ 이면 두 직선의 교점이 존재한다.

해설

i) $\dfrac{m+1}{2} = \dfrac{1}{-m+2} = \dfrac{1}{1}$ 에서

$-m^2+m+2=2$

$-m(m-1)=0$, $m=0$, $m=1$

$m=0$ 이면 평행

$m=1$ 이면 일치

ii) $(m+1)2-(m-2)=0$ 에서

$m=-4$ 이면 수직

iii) $m \neq 0$, $m \neq 1$ 이면 한 점에서 만난다.

14. 두 점 $A(-1,\ 4)$, $B(3,\ 2)$ 을 이은 선분 AB 의 수직이등분선 위에 있는 점을 고르면?

① $(-2,\ 5)$ ② $(1,\ 2)$ ③ $(4,\ 9)$

④ $(5,\ -7)$ ⑤ $(7,\ -15)$

해설

$\overline{AB}$ 의 방정식을 구해보면,

$$y = \frac{2-4}{3-(-1)}(x-3)+2 \qquad \therefore\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$\therefore$ 수직이등분성의 기울기는 2 이고 $\overline{AB}$ 의 중점 을 지난다.

$$\Rightarrow\ y = 2\left(x - \frac{-1+3}{2}\right) + \frac{4+2}{2} = 2x+1$$

$\Rightarrow$ 점 $(4,\ 9)$ 를 지난다.

15. 점 $(-4,\ 2)$ 를 지나고 x 축, y 축에 모두 접하는 원은 2 개가 있다. 이때, 두 원 중 큰 원의 넓이는?

① 25π ② 50π ③ 75π ④ 100π ⑤ 125π

해설

제 2 사분면의 점$(-4, 2)$ 를 지나고
x 축, y 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2(r>0)$
$(-4+r)^2+(2-r)^2=r^2$
$16-8r+r^2+4-4r+r^2=r^2,\ (r-2)(r-10)=0$
$\therefore\ r=2$ 또는 $r=10$
따라서 큰 원의 반지름의 길이가 10 이므로
넓이는 $\pi\cdot 10^2=100\pi$

16. 다음은 점 P$(a,\ b)$ 의 직선 $y=x$ 에 대해 대칭인 점 Q의 좌표 $(x,\ y)$ 를 구하는 과정이다.
$\boxed{}$ 에 알맞은 말을 차례대로 써 넣어라.

(1) $\overline{PQ}$ 의 중점 $\left(\frac{x+a}{2},\ \frac{y+b}{2}\right)$ 은 직선 $\boxed{}$ 위에 있으므로 $\frac{y+b}{2}=\frac{x+a}{2}$
$\therefore\ x-y=b-a\cdots①$
(2) 직선 PQ 는 직선 $y=x$ 에 수직이므로
$\frac{y-b}{x-a}=\boxed{}$
①, ② 를 연립하여 x , y 를 구하면
$x=\boxed{}$, $y=\boxed{}$이다.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

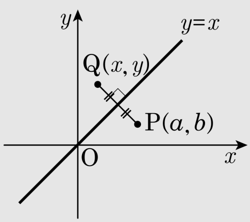
▷ 정답: $y=x$

▷ 정답: -1

▷ 정답: b

▷ 정답: a

해설



17. 점 $(1, 2)$ 와 직선 $x + 2y - 1 + k(2x - y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

해설

점과 직선사이 거리 구하는 공식을 이용한다.

$$\frac{|2k + 1 + 2(2 - k) - 1|}{\sqrt{(2k + 1)^2 + (2 - k)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5k^2 + 5}}$$

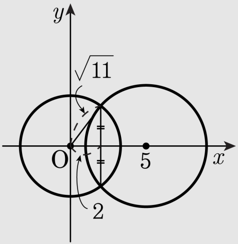
$\therefore$ 최솟값은 $k = 0$ 일 때, 분모는 $\sqrt{5}$, 즉 $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

18. 두 원 $x^2+y^2=11$, $(x-5)^2+y^2=16$의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{11}$ ③ 5 ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

두 원 $x^2+y^2=11$과 $(x-5)^2+y^2=16$
의 공통현의 방정식은
$\left(x^2+y^2-11\right)-\left(x^2-10x+y^2+9\right)=$
0
$10x-20=0 \quad \therefore x=2$
원 $x^2+y^2=11$의 중심 $(0,0)$과 공통현
$x=2$사이의 거리가 2이고,
반지름의 길이가 $\sqrt{11}$이므로 공통현의 길이는
$2\times\sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2-2^2}=2\sqrt{7}$



19. 두 원 $(x-a)^2+(y-2)^2=9$, $(x-1)^2+(y+a)^2=1$이 직교하도록 하는 a의 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{5}{2}$

해설

두 원의 중심이 각각 $(a,\ 2)$, $(1,\ -a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-1)^2+(2+a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 $3,\ 1$이므로
직교하기 위한 조건은
$(a-1)^2+(2+a)^2=3^2+1^2$
$\therefore\ 2a^2+2a-5=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 곱은 $-\frac{5}{2}$

20. 감시 카메라의 서쪽 20km 해상에서 한 척의 배가 북동쪽 방향으로 매시 5km 의 속력으로 가고 있다. 감시 카메라로부터 15km 이내에 있는 배는 감시화면에 나타난다고 할 때, 이 배는 감시 화면에 몇 시간 동안 나타나는지 구하여라

▶ 답 : ________ 시간

▷ 정답 : 2 시간

해설

감시카메라의 위치와 배의 처음 위치를 각각 $O(0, 0), A(-20, 0)$ 이라 하면, 배의 자취의 방정식은 $y = x + 20(x \geq -20)$ 이다.
배가 B, C 위치 사이에 있을 때, 감시 화면에 나타나므로 $\overline{BC}$ 의 길이를 구하면 된다.
$O(0, 0)$ 에서 직선 $x - y + 20 = 0$ 에 이르는 거리는

$$\frac{|20|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 10\sqrt{2}$$

$\therefore \overline{BC} = 2\sqrt{15^2 - (10\sqrt{2})^2} = 10(km)$
따라서 배의 속력이 $5\,km/h$ 시이므로
이 배가 감시 화면에 나타나는 시간은 2 시간이다.