

1. $\frac{x+1}{3} = y-2$ 를 만족하는 모든 실수 x, y 에 대하여, 항상 $ax+by=7$ 이 성립할 때, a, b 의 값을 구하여라. (a, b 는 상수)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

▷ 정답 : $b = 3$

해설

$$\frac{x+1}{3} = y-2, x+1 = 3(y-2)$$

$$x-3y = -7$$

$$-x+3y = 7 \Leftrightarrow ax+by = 7$$

$$\therefore a = -1, b = 3$$

2. 다항식 $x^4 - 3x^2 + ax + 5$ 를 $x + 2$ 로 나누면 나머지가 3이다. a 의 값은?

① 0

② 2

③ 3

④ -2

⑤ -3

해설

$x^4 - 3x^2 + ax + 5 = f(x)$ 라 놓자.

$f(-2) = 3$ 에서 $-2a + 9 = 3$

$\therefore a = 3$

3. $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 아닌 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 2

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 14

해설

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^n = i^n$$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m + 2$ ($m \geq 0$)

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

4. 이차함수 $y = \frac{3}{2}x^2 + 6x - 3$ 은 $x = a$ 일 때, 최솟값 b 를 갖는다고 한다. $a - b$ 의 값을 구하면?

① -8 ② -5 ③ 3 ④ 7 ⑤ 11

해설

$$y = \frac{3}{2}(x^2 + 4x) - 3 = \frac{3}{2}(x + 2)^2 - 9 \text{ 에서}$$

$$a = -2, b = -9$$

그러므로 $a - b = 7$ 이다.

5. 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -1$ 일 때, 최솟값 4를 갖는 이차함수의 식은?

① $y = 2(x - 1)^2$

② $y = 2(x - 1)^2 + 4$

③ $y = 2(x + 1)^2 + 4$

④ $y = -2(x + 1)^2 + 4$

⑤ $y = -2(x - 1)^2 + 4$

해설

$y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 꼭짓점이 $(-1, 4)$ 이므로
 $y = 2(x + 1)^2 + 4$

6. 다음 삼차방정식의 정수해를 구하여라.

$x^3 - 1 = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ 정수해는 $x = 1$

7.

세 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c = \sqrt{6}$,
 $ab+bc+ca=2$ 일 때, $81(abc)^2$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 24



8. 다항식 $f(x)$ 를 $2x - 1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x + 2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x + 2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x) = (2x - 1)Q(x) - 4$ 라 하면

$f(-2) = -5Q(-2) - 4$

그런데 $Q(-2) = 2$ 이므로 $f(-2) = -14$

9. 삼각형 ABC의 세변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$ 인 관계가 성립할 때 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?
- ① $b = c$ 인 이등변 삼각형
 - ② $a = c$ 인 이등변삼각형
 - ③ b 가 빗변의 길이인 직각삼각형
 - ④ 정삼각형
 - ⑤ c 가 빗변의 길이인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^2(a+b) + b^2(a+b) - c^2(a+b) \\ &= (a+b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0 \\ a^2 + b^2 &= c^2 \quad (\because a+b \neq 0) \\ \therefore c &\text{가 빗변의 길이인 직각삼각형}\end{aligned}$$

10. $x = 1001$ 일 때, $\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

11. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2, 2x^3 + (a - 2)x^2 - 2x$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$x^3 + 2x^2 - x - 3 = x^2(x + 2) - (x + 2)$
 $= (x + 2)(x - 1)(x - 2)$
 $2x^3 + (a - 2)x^2 - 2x = x(2x^2 + (a - 2)x - 2) \cdots \textcircled{1}$
두 식의 최대 공약수가 이차식이므로
 $x = -2, -1, 1$ 을 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면
식의 값이 동시에 0이 되는 경우가 있어야 한다.
 $x = -2$ 일 때, $8 - 2a + 4 - 2 = 0, a = 5$
 $x = -1$ 일 때, $2 - a + 2 - 2 = 0, a = 2$
 $x = 1$ 일 때, $2 + a - 2 - 2 = 0, a = 2$
 $x = -1, 1$ 일때, 일치함
최대 공약수는 $(x + 1)(x - 1)$
 $\therefore a = 2$

12. $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{29} + i^{30}$ 을 계산하면?

- ① $i - 1$ ② $1 - 2i$ ③ $3i - 1$ ④ $2 - 3i$ ⑤ $i + 3$

해설

$$\begin{aligned} i + i^2 + i^3 + i^4 &= i - 1 - i + 1 = 0 \\ i^{4k} &= 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i \\ \therefore i + i^2 + i^3 + \dots + i^{29} + i^{30} &= i^{29} + i^{30} \\ &= i + i^2 \\ &= i - 1 \end{aligned}$$

13. $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} + \sqrt{-18} \div \sqrt{-6}$ 을 간단히 하면?

① $-3\sqrt{3}$

② $-2\sqrt{3}$

③ $-\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}$

⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \sqrt{3}i \times 2i + \sqrt{18}i \times \frac{1}{\sqrt{6}i} \\ &= -2\sqrt{3} + \sqrt{3} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

14. 연산 $*$ 를 $a * b = ab + 2(a + b)$ 라 정의할 때, 다음 방정식의 두 근을 α, β 라 한다. 이때, $|\alpha - \beta|$ 의 값은?

$$(3x * x) - (3 * x) + \{(-1) * 2\} = 0$$

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

연산 $*$ 의 정의에 따라서
 $3x * x = 3x \cdot x + 2(3x + x) = 3x^2 + 8x$, $3 * x = 3 \cdot x + 2(3 + x) = 5x + 6$,
 $-1 * 2 = (-1) \cdot 2 + 2(-1 + 2) = -2 + 2 = 0$
주어진 식은 $3x^2 + 8x - (5x + 6) + 0 = 0$
 $3x^2 + 3x - 6 = 0$ 에서 $3(x + 2)(x - 1) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 1 \quad \therefore |\alpha - \beta| = 3$

15. 유리수 a, b, c, d 에 대하여 $(\sqrt{2} + i)^4 + a(\sqrt{2} + i)^3 + b(\sqrt{2} + i)^2 + c(\sqrt{2} + i) + d = 0$ 을 만족한다. 이 때, $a - b - c - d$ 의 값은? (단, $i^2 = -1$)

① -7

② 3

③ 1

④ -1

해설

$$(\sqrt{2} + i)^4 = -7 + 4\sqrt{2}i, (\sqrt{2} + i)^3 = -\sqrt{2} + 5i,$$

$$(\sqrt{2} + i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i$$

$$(-7 + 4\sqrt{2}i) + a(-\sqrt{2} + 5i)$$

$$+ b(1 + 2\sqrt{2}i) + c(\sqrt{2} + i) + d = 0$$

$$(-7 - \sqrt{2}a + b + \sqrt{2}c + d)$$

$$+ (4\sqrt{2} + 5a + 2\sqrt{2}b + c)i = 0$$

$$\therefore (-7 + b + d) + (c - a)\sqrt{2} = 0,$$

$$(5a + c) + (4 + 2b)\sqrt{2} = 0$$

$$a, b, c, d \text{ 는 유리수이므로 } -7 + b + d = 0 :$$

$$c - a = 0, 5a + c = 0, 4 + 2b = 0$$

$$\therefore a = 0, b = -2, c = 0, d = 9$$

$$\therefore a - b - c - d = -7$$

16. a, b 는 양수라 할 때, 다음 중 $z = a(1+i) + b(1-i), i = \sqrt{-1}$ 의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $1 - 3i$

② $2 + 3i$

③ $4 - 2i$

④ $-3 + 2i$

⑤ $2 - 5i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i$ (a, b 는 양수)

① $1 - 3i$ 에서 $a+b=1, a-b=-3$

$a=-1, b=2 \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

② $2 + 3i$ 에서 $a+b=2, a-b=3$

$a=\frac{5}{2}, b=-\frac{1}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

③ $4 - 2i$ 에서 $a+b=4, a-b=-2$

$a=1, b=3 \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건을 만족시킴

④ $-3 + 2i$ 에서 $a+b=-3, a-b=2$

$a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{5}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

⑤ $2 - 5i$ 에서 $a+b=2, a-b=-5$

$a=\frac{3}{2}, b=\frac{7}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

17. x, y 에 대한 이차식 $f(x, y) = x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3$ 이 x, y 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$$x = -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$$

$$= -(y-1) \pm \sqrt{-(2+k)y + 4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이면

$$x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta) \text{ 이고}$$

준식이 x, y 의 일차식으로 인수분해되므로

x 의 두 근 $\textcircled{1}$ 에서 $-(2+k)y + 4$ 가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.

따라서 근호 안의 판별식 D 는 0이어야 한다.

$$\therefore D = (2+k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$$

$$2+k = 0$$

$$\therefore k = -2$$

18. $x^2 + ax + (a^2 + 2a - 3) = 0$ 의 두 근이 서로 다른 부호를 갖고 양근이 음근의 절댓값보다 작을 때, 상수 a 의 범위를 구하면?

- ① $0 < a < 1$ ② $\frac{1}{2} < a < 2$ ③ $1 \leq a < 2$
④ $2 < a \leq 3$ ⑤ $-\frac{1}{2} < a < 2$

해설

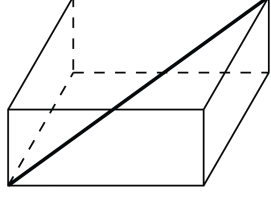
두 근을 α, β 라 하면

$|\text{음근}| > \text{양근}$ 이므로

$$\alpha + \beta = -a < 0, \quad \alpha\beta = a^2 + 2a - 3 < 0$$

$$\therefore 0 < a < 1$$

19. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겹넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a , b , c 라 할 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?



- ① 12 ② 18 ③ 21 ④ 23 ⑤ 30

해설

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3, \quad abc = 6, \quad 2(ab + bc + ca) = 16$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$(a + b + c)^2 = 25, \quad a + b + c = 5 (\because a, b, c \text{는 양수})$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{에 각각 대입하면}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 18 = 5 \times (9 - 8)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 23$$

20. 정수 계수를 갖는 임의의 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 α 는 $f(x) + 1 = 0$ 의 한 정수근이고 β 는 $f(x) - 1 = 0$ 의 한 정수근일 때, $\beta - \alpha$ 의 값이 될 수 없는 것은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(\alpha) + 1 = 0, f(\beta) - 1 = 0$ 이므로 $f(\beta) - f(\alpha) = 2$
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 정수)로 놓으면
 $f(\beta) - f(\alpha) = a(\beta^3 - \alpha^3) + b(\beta^2 - \alpha^2) + c(\beta - \alpha) = 2$
 $(\beta - \alpha) \{a(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) + b(\beta + \alpha) + c\} = 2$
따라서 $\beta - \alpha$ 는 2의 약수이어야 한다.
 $\therefore \beta - \alpha = \pm 1$ 또는 ± 2