1. $x = 2 - \sqrt{3}i$, $y = 2 + \sqrt{3}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$x^2 + y^2 = (2 - \sqrt{3}i)^2 + (2 + \sqrt{3}i)^2$$
$$= 4 - 4\sqrt{3}i - 3 + 4 + 4\sqrt{3}i - 3$$
$$= 2$$

해설

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$
$$= 4^2 - 2 \cdot 7$$
$$= 16 - 14$$
$$= 2$$

2. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = 3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = 6$

① ㉠,㉡ ② ㉢,㉣ ③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥ ⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = -\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} = -3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = \dfrac{4}{2i} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2}i \times \sqrt{5} = \sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = \sqrt{9} + (\sqrt{3}i)^2 = 0$

3. $\dfrac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

① $1-\sqrt{2}$ ② $-1-\sqrt{2}$ ③ $(1+\sqrt{2})i$

④ $-(1+\sqrt{2})i$ ⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{1}{i}\\ &= (\sqrt{2}+1)\times(-i)\\ &= -(1+\sqrt{2})i\end{aligned}$$

4. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2 의 제곱근은 $\sqrt{2}i$ 와 $-\sqrt{2}i$ 이다.

② $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16}=-4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

5. n이 홀수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$의 값은?

① 0　　② 1　　③ i　　④ $-i$　　⑤ -1

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준 식}) &= \left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n + \left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n \\
&= i^n + (-i)^n (n\text{은 홀수}) \\
&= i^n - i^n = 0
\end{aligned}
$$

6. $f(x) = \dfrac{x}{1-i}$, $g(x) = \dfrac{x}{1+i}$ 인 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $\{f(1+i)\}^{2006} + \{g(1-i)\}^{2007}$ 의 값은?

① -2　　② $-1+i$　　③ -1

④ $-1-i$　　⑤ 2

해설

$f(1+i) = \dfrac{1+i}{1-i} = i$

$g(1-i) = \dfrac{1-i}{1+i} = -i$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= (i)^{2006} + (-i)^{2007} \\ &= i^2 + (-i)^3 \ (\because i^{2004} = (-i)^{2004} = 1) \\ &= -1 + i \end{aligned}$$

7. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}$ 을 간단히 하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$,

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (-i)^{50}+i^{50}-(-i)^{100} \\ &= \{(-i)^2\}^{25}+(i^2)^{25}-\{(-i)^2\}^{50} \\ &= -1-1-1=-3\end{aligned}$$

8. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, 다음 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $z \neq 0$)

보기

㉠ $z+\bar{z}$ 는 실수이다. ㉡ $z\bar{z} > 0$

㉢ $z-\bar{z}$ 는 허수이다. ㉣ $z^2+\bar{z}^2 \geq 0$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉣　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z = a + bi,\ \bar{z} = a - bi,\ (a,\ b$ 는 실수)

㉠ $z+\bar{z} = 2a$(실수)

㉡ $z\bar{z} = a^2 + b^2 > 0$

㉢ $z - \bar{z} = 2bi$, $b = 0$ 일 경우에는 0 이다.
즉, z 가 실수부로만 이루어져 있는 경우에는 실수이다.
$ex)\ z = 3,\ \bar{z} = 3,\ z - \bar{z} = 3 - 3 = 0$

㉣ $z^2 + \bar{z}^2 = 2(a^2 - b^2)$ → 우변이 0보다 크거나 같다고 할 수는 없다.

9. 임의의 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z=x+yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z}=x-yi$ 의 곱 $z\bar{z}=1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 을 간단히 하면?

① $-y$　　② $-x$　　③ x　　④ y　　⑤ 0

해설

$z\bar{z}=1$ 에서 $\frac{1}{z}=\bar{z}=x-yi$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)&=\frac{1}{2}\{(x+yi)+(x-yi)\}\\&=\frac{1}{2}\times 2x\\&=x\end{aligned}$$

10. $\bar{z} = -z$ 를 만족하는 z 에 대하여 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 이라 할 때, $w\overline{w}$ 의 값을 구하여라. (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$
$\bar{z} = -z$ 이므로 $a - bi = -(a + bi)$
$a - bi = -a - bi$, $2a = 0$
따라서 $a = 0$ 이므로 $z = bi$
$z = bi$ 를 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 에 대입하면

$$w = \frac{-1+bi}{1+bi},\ \overline{w} = \overline{\left(\frac{-1+bi}{1+bi}\right)} = \frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{w} &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-1-bi}{1-bi} \\ &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-(1+bi)}{-(-1+bi)} \\ &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{1+bi}{-1+bi} = 1\end{aligned}$$

11. 두 복소수 $\alpha = a - 2i$, $\beta = 5 + bi$에 대하여 $\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$를 만족하는 실수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -6$

해설

$\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$

$(a - 2i) + (5 - bi) = 3 + 2i$

$(a + 5) - (2 + b)i = 3 + 2i$

$\therefore\ a = -2, b = -4$

$\therefore\ a + b = -6$

12. 임의의 복소수 a, b 에 대하여 연산 $\square$를 $a \square b = (a+b) - ab$ 로 정의할 때, $z \square i = 3 + 2i$ 를 만족하는 복소수 z 는?

① $-1 + 2i$　　② $1 + 2i$　　③ $3 + 2i$

④ $5 + 2i$　　⑤ $7 + 2i$

해설

$z \square i = z + i - zi = (1-i)z + i$ 에서

$(1-i)z + i = 3 + 2i$

$(1-i)z = 3 + i$

$$\therefore\ z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$$

13. $w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $1+w+w^2+\cdots+w^{100}$ 의 값은?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 0
④ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$w^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$

$=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$w^3=w\cdot w^2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1-3i^2}{4}=1$

$1+w+w^2=1+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=0$ 이므로

$\therefore 1+w+w^2+w^3+w^4+\cdots+w^{100}$
$=1+w+w^2+w^3(1+w+w^2)+\cdots$
$+w^{96}(1+w+w^2)+w^{99}(1+w)$
$=0+0+\cdots+0+w^{99}(1+w)=(w^3)^{33}\cdot(1+w)$
$=1+w=1+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

14. 다음을 계산하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3+3i$

해설

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

$$= \sqrt{3\cdot(-3)} - \sqrt{(-3)\cdot(-3)} + \sqrt{\frac{-18}{2}} - \sqrt{\frac{18}{-2}}$$

$$= \sqrt{-9} - \sqrt{9} + \sqrt{-9} - \sqrt{-9}$$

$$= -\sqrt{9} + \sqrt{-9}$$

$$= -3+3i$$

15. 복소수 $z = \dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^3 - 2z^2 + 2z + 5$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$z = \dfrac{2}{1+i} = 1 - i$

$z^2 = -2i,\ z^3 = -2 - 2i$

$\therefore\ z^3 - 2z^2 + 2z + 5$

$= (-2i - 2) - 2(-2i) + 2(1 - i) + 5$

$= 5$

해설

$$\begin{aligned} z = 1 - i \quad &\Rightarrow \quad z - 1 = -i \\ &\Rightarrow \quad z^2 - 2z + 1 = -1 \\ &\Rightarrow \quad z^2 - 2z + 2 = 0 \end{aligned}$$

$z^3 - 2z^2 + 2z + 5 = z(z^2 - 2z + 2) + 5 = 5$

16. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{50}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\frac{1+i}{1-i}=i,\ \frac{1-i}{1+i}=-i$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}\\ &= (-i)^{50}+(i)^{50}\\ &= (-i)^2+(i)^2\\ &= -2\end{aligned}$$