1. $x = 2 - \sqrt{3}i$, $y = 2 + \sqrt{3}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= (2 - \sqrt{3}i)^2 + (2 + \sqrt{3}i)^2 \\
&= 4 - 4\sqrt{3}i - 3 + 4 + 4\sqrt{3}i - 3 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

해설

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\
&= 4^2 - 2 \cdot 7 \\
&= 16 - 14 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

2. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = 3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = 6$

① ㉠,㉡　② ㉢,㉣　③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥　⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = -\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} = -3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = \dfrac{4}{2i} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2}i \times \sqrt{5} = \sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = \sqrt{9} + (\sqrt{3}i)^2 = 0$

3. $\dfrac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

① $1-\sqrt{2}$ ② $-1-\sqrt{2}$ ③ $(1+\sqrt{2})i$

④ $-(1+\sqrt{2})i$ ⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{1}{i}\\ &= (\sqrt{2}+1)\times(-i)\\ &= -(1+\sqrt{2})i\end{aligned}$$

4. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2의 제곱근은 $\sqrt{2}i$와 $-\sqrt{2}i$이다.

② $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=-\sqrt{(-2)(-3)}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\dfrac{-8}{-2}}$

⑤ $-\sqrt{-16}=-4i$

해설

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

5. n이 홀수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ i ④ $-i$ ⑤ -1

해설

$$(\text{준 식})=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n+\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n$$

$$=i^n+(-i)^n(n\text{은 홀수})$$

$$=i^n-i^n=0$$

6. $f(x)=\dfrac{x}{1-i}$, $g(x)=\dfrac{x}{1+i}$ 인 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\{f(1+i)\}^{2006}+\{g(1-i)\}^{2007}$ 의 값은?

① -2　　② $-1+i$　　③ -1

④ $-1-i$　　⑤ 2

해설

$$f(1+i)=\frac{1+i}{1-i}=i$$

$$g(1-i)=\frac{1-i}{1+i}=-i$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= (i)^{2006}+(-i)^{2007}\\ &= i^2+(-i)^3\ (\because i^{2004}=(-i)^{2004}=1)\\ &= -1+i\end{aligned}$$

7. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}$ 을 간단히 하시오.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -3

해설

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i\ ,$$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{준식})&=(-i)^{50}+i^{50}-(-i)^{100}\\&=\{(-i)^2\}^{25}+(i^2)^{25}-\{(-i)^2\}^{50}\\&=-1-1-1=-3\end{aligned}$$

8. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, 다음 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $z \neq 0$)

보기

㉠ $z+\bar{z}$ 는 실수이다.	㉡ $z\bar{z}>0$
㉢ $z-\bar{z}$ 는 허수이다.	㉣ $z^2+\bar{z}^2 \geq 0$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉣　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z=a+bi,\ \bar{z}=a-bi,\ (a,\ b$ 는 실수$)$

㉠ $z+\bar{z}=2a$(실수)

㉡ $z\bar{z}=a^2+b^2>0$

㉢ $z-\bar{z}=2bi$, $b=0$ 일 경우에는 0 이다.

즉, z 가 실수부로만 이루어져 있는 경우에는 실수이다.

$ex)\ z=3,\ \bar{z}=3,\ z-\bar{z}=3-3=0$

㉣ $z^2+\bar{z}^2=2(a^2-b^2) \rightarrow$ 우변이 0보다 크거나 같다고 할 수는 없다.

9. 임의의 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 의 곱 $z\bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ 을 간단히 하면?

① $-y$ ② $-x$ ③ x ④ y ⑤ 0

해설

$z\bar{z} = 1$ 에서 $\frac{1}{z} = \bar{z} = x - yi$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2}\{(x + yi) + (x - yi)\} \\ &= \frac{1}{2} \times 2x \\ &= x\end{aligned}$$

10. $\bar{z}=-z$ 를 만족하는 z 에 대하여 $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ 이라 할 때, $w\bar{w}$ 의 값을 구하여라. (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$z=a+bi$ $(a,\ b$ 는 실수$)$로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

$\bar{z}=-z$ 이므로 $a-bi=-(a+bi)$

$a-bi=-a-bi$, $2a=0$

따라서 $a=0$ 이므로 $z=bi$

$z=bi$ 를 $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ 에 대입하면

$$w=\frac{-1+bi}{1+bi},\ \bar{w}=\overline{\left(\frac{-1+bi}{1+bi}\right)}=\frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ w\bar{w}&=\frac{-1+bi}{1+bi}\cdot\frac{-1-bi}{1-bi}\\&=\frac{-1+bi}{1+bi}\cdot\frac{-(1+bi)}{-(-1+bi)}\\&=\frac{-1+bi}{1+bi}\cdot\frac{1+bi}{-1+bi}=1\end{aligned}$$

11. 두 복소수 $\alpha = a-2i$, $\beta = 5+bi$에 대하여 $\alpha + \overline{\beta} = \overline{3-2i}$를 만족하는 실수 a, b의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $a+b=-6$

해설

$\alpha + \overline{\beta} = \overline{3-2i}$

$(a-2i)+(5-bi)=3+2i$

$(a+5)-(2+b)i=3+2i$

$\therefore\ a=-2, b=-4$

$\therefore\ a+b=-6$

12. 임의의 복소수 a, b 에 대하여 연산 □를 $a\square b=(a+b)-ab$ 로 정의할 때, $z\square i=3+2i$ 를 만족하는 복소수 z 는?

① $-1+2i$　② $1+2i$　③ $3+2i$

④ $5+2i$　⑤ $7+2i$

해설

$z\square i=z+i-zi=(1-i)z+i$ 에서

$(1-i)z+i=3+2i$

$(1-i)z=3+i$

$$\therefore\ z=\frac{3+i}{1-i}=\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$=\frac{2+4i}{2}=1+2i$$

13. $w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $1+w+w^2+\cdots+w^{100}$ 의 값은?

① $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 0

④ $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$$w^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$$

$$=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$w^3=w\cdot w^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}}{2}=\frac{1-3i^2}{4}=1$$

$1+w+w^2=1+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=0$ 이므로

$$\therefore 1+w+w^2+w^3+w^4+\cdots+w^{100}$$

$$=1+w+w^2+w^3(1+w+w^2)+\cdots$$

$$+w^{96}(1+w+w^2)+w^{99}(1+w)$$

$$=0+0+\cdots+0+w^{99}(1+w)=(w^3)^{33}\cdot(1+w)$$

$$=1+w=1+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

14. 다음을 계산하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3 + 3i$

해설

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

$$= \sqrt{3 \cdot (-3)} - \sqrt{(-3) \cdot (-3)} + \sqrt{\frac{-18}{2}} - \sqrt{\frac{18}{-2}}$$

$$= \sqrt{-9} - \sqrt{9} + \sqrt{-9} - \sqrt{-9}$$

$$= -\sqrt{9} + \sqrt{-9}$$

$$= -3 + 3i$$

15. 복소수 $z = \dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^3 - 2z^2 + 2z + 5$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$z = \frac{2}{1+i} = 1 - i$$

$z^2 = -2i,\ z^3 = -2 - 2i$

$\therefore\ z^3 - 2z^2 + 2z + 5$

$= (-2i - 2) - 2(-2i) + 2(1 - i) + 5$

$= 5$

해설

$$\begin{aligned} z = 1 - i \quad &\Rightarrow \quad z - 1 = -i \\ &\Rightarrow \quad z^2 - 2z + 1 = -1 \\ &\Rightarrow \quad z^2 - 2z + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$z^3 - 2z^2 + 2z + 5 = z(z^2 - 2z + 2) + 5 = 5$$

16. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{50}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\frac{1+i}{1-i}=i,\ \frac{1-i}{1+i}=-i$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}\\ &= (-i)^{50}+(i)^{50}\\ &= (-i)^{2}+(i)^{2}\\ &= -2\end{aligned}$$