

1. 다음 식을 간단히 하여라.

$$\frac{1-2i}{2+3i} + \frac{1+2i}{2-3i}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{8}{13}$

해설

(준식)

$$\begin{aligned} &= \frac{(1-2i)(2-3i) + (1+2i)(2+3i)}{(2+3i)(2-3i)} \\ &= \frac{(2-6) + (-4-3)i + (2-6) + (4+3)i}{2^2 + 3^2} \\ &= \frac{(-4-7i) + (-4+7i)}{13} \\ &= -\frac{8}{13} \end{aligned}$$

2. $i(x + 2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① ± 1

② ± 2

③ ± 3

④ ± 4

⑤ ± 5

해설

$$\begin{aligned} i(x + 2i)^2 &= i(x^2 + 4ix - 4) = x^2i - 4x - 4i \\ &= -4x + (x^2 - 4)i \end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$$\therefore x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

3. 복소수 $z = (2 + i)a^2 + (1 + 4i)a + 2(2i - 3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

① -2

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{2}$

⑤ 3

해설

$$z = (2a^2 + a - 6) + (a^2 + 4a + 4)i$$

순허수이므로 $2a^2 + a - 6 = 0$

$$\Rightarrow (a + 2)(2a - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

그런데 $a = 2$ 이면,

$a^2 + 4a + 4 = 0$ 이 되어 순허수가 성립되지 않는다.

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

4. $i^2 = -1$ 이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2, -\sqrt{2}, 2i, -2i,$
 $3i, -3i, 1-i, 1+i$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$i^2 = -1$ 이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$ 의 꼴이 되어야 한다.

$\therefore 2i, -2i, 3i, -3i$ 4 개,

$2, -\sqrt{2}$ 는 실수이므로

(실수) $^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$ 가 된다.

5. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2 - (1+3i)x - (2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(1+i)x^2 - (1+3i)x - (2-2i)$$

$$= (x^2 - x - 2) + (x^2 - 3x + 2)i$$

순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분) $\neq 0$ 이어야 하므로

$$x^2 - x - 2 = 0, \quad x^2 - 3x + 2 \neq 0$$

$$(i) \quad x^2 - x - 2 = 0 \text{ 에서 } (x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

$$(ii) \quad x^2 - 3x + 2 \neq 0 \text{ 에서 } (x-1)(x-2) \neq 0$$

$$\therefore x \neq 1 \text{ 또는 } x \neq 2$$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $x = -1$

6. $(1+i)x^2 + (1-i)x - 6 - 2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3

② -2

③ -1

④ 2

⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2 + x - 6) + (x^2 - x - 2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) = 0$ 이어야
하므로 $x = -3$ 또는 $x = 2$ 이다.

그런데 $x^2 - x - 2 \neq 0$ 이어야 하므로 $x \neq 2$

따라서 $x = -3$

7. $(1 + ai)^2 = 2i$ (a 는 실수) 라 할 때 $(1 + ai)(1 - ai)$ 의 값을 구하시오.
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(1 + ai)^2 = 2i \text{ 에서 } (1 - a^2) + 2ai = 2i$$

$$\text{복소수의 상등에서 } 1 - a^2 = 0, 2a = 2$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore (1 + ai)(1 - ai) = (1 + i)(1 - i)$$

$$= 1 - (-1)$$

$$= 2$$

8. 실수 x, y 에 대하여, 등식 $2x + y + (x - 3y)i = 3 + 2i$ 가 성립할 때, $\frac{x}{y}$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x + y = 3, x - 3y = 2$ 이므로

$$x = \frac{11}{7}, y = -\frac{1}{7}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{11}{7} \times -\frac{7}{1} = -11$$

9. $(1 - 3i)x + (3 + 2i)y = 1 + 8i$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(1 - 3i)x + (3 + 2i)y = 1 + 8i,$$

$$(x + 3y) + (-3x + 2y)i = 1 + 8i \text{ 에서}$$

복소수의 상등에 의하여

$$x + 3y = 1, \quad -3x + 2y = 8 \text{ 이고}$$

$$\text{연립하여 풀면 } y = 1, \quad x = -2$$

$$\therefore x + y = -1$$

10. $x = 1 + 2i$, $y = \frac{1 + 2i}{1 - i}$, $z = \frac{1 - 2i}{1 - i}$ 일 때, $xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1 + 3i$

② $-1 - 2i$

③ $-1 + 2i$

④ $-1 - i$

⑤ $-1 + i$

해설

$$x = 1 + 2i, y = \frac{1 + 2i}{1 - i}, z = \frac{1 - 2i}{1 - i}$$

$$\begin{aligned}\therefore xy + xz &= \frac{(1 + 2i)^2}{1 - i} + \frac{(1 - 2i)(1 + 2i)}{1 - i} \\ &= \frac{-3 + 4i + 5}{1 - i} \\ &= \frac{2 + 4i}{1 - i} \\ &= -1 + 3i\end{aligned}$$

11. 복소수 $z = (1 + i)x^2 + x - (2 + i)$ 가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -1

② 1

③ 1

④ 2

⑤ 2

해설

복소수 z 를 $a + bi$ (a, b 는 실수)의 꼴로 정리하면

$$z = (x^2 + x - 2) + (x^2 - 1)i$$

이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.

$$\text{즉, } x^2 - 1 = 0, x = \pm 1$$

한편, $x = 1$ 이면 $z = 0 + 0i = 0$ 이므로

$z \neq 0$ 라는 조건에 맞지 않는다.

$$\therefore x = -1$$

12. 복소수 $(1+i)x^2 - (1-4i)x - (2-3i)$ 가 실수일 때의 x 값과 순허수일 때의 x 값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$$(x^2 - x - 2) + (x^2 + 4x + 3)i$$

실수가 되기 위해서는 $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$(x+1)(x+3) = 0 \therefore x = -3, -1$$

순허수가 되기 위해서는

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ 이고 } x^2 + 4x + 3 \neq 0$$

$$x = -1, 2 \text{ 이고 } x \neq -3, -1 \therefore x = 2$$

$$(-3) \times (-1) \times 2 = 6$$

13. $a^2(1+i) + a(2+i) - 8 - 6i$ 가 순허수가 되도록 실수 a 의 값을 구하면?

① -10

② -8

③ -6

④ -4

⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} & a^2(1+i) + a(2+i) - 8 - 6i \\ &= (a^2 + 2a - 8) + i(a^2 + a - 6) \\ &= (a+4)(a-2) + i(a+3)(a-2) \end{aligned}$$

만약에 $a = 2$ 가 되면 실수가 된다.
 $a \neq 2, \therefore a = -4$

14. 복소수 $z = (1 + i)x + 1 - 2i$ 에 대하여 z^2 이 음의 실수일 때, 실수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

해설

$$z = (1 + i)x + 1 - 2i = (x + 1) + (x - 2)i$$

z^2 의 음의실수 $\Leftrightarrow z$ 가 순허수

$$\therefore x + 1 = 0, \quad x = -1$$

15. $\sqrt{(y-x)^2} + (y-1)i = -2x - 3i$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{5}$

⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$$|y-x| + (y-1)i = -2x - 3i$$

$$|y-x| = -2x$$

$$y-1 = -3 \quad \therefore y = -2$$

(i) $y \geq x$ 일 때

$$y-x = -2x, y = -x, x = 2 \text{ (모순)}$$

(ii) $y < x$ 일 때

$$x-y = -2x, y = 3x$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3} \text{ (성립)}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

16. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y 를 구할 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.

$$(1 - 2xi)(2 - yi) = 6 - 2i \quad (\text{단, } x > 0)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$(2 - 2xy) - (4x + y)i = 6 - 2i$$

$$2 - 2xy = 6, \quad 4x + y = 2$$

연립하여 x 에 대해 정리하면

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$(x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 1(x > 0), \quad y = -2$$

17. 복소수 $z = 1 + 4i$ 일 때, $\overline{x(2-i) + y(1-i)} = \bar{z}$ 가 성립하도록 하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 복소수 z 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$)

① 0

② 2

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$z = 1 + 4i$ 이므로 $\bar{z} = 1 - 4i$ 이다.

주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned}\overline{x(2-i) + y(1-i)} &= \overline{x(2-i)} + \overline{y(1-i)} \\ &= x(2+i) + y(1-i)\end{aligned}$$

$$\therefore x(2+i) + y(1-i) = 1 - 4i$$

$$(2x + y) + (x - y)i = 1 - 4i$$

복소수가 서로 같을 조건에서

$$2x + y = 1, x - y = -4$$

위 두 식을 연립하여 풀면 $x = -1, y = 3$

$$\therefore x + y = 2$$

18. $4-3i+\frac{3-5i}{1+i}+4i+\frac{-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i}$ 를 간단히 한 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-i$

② 3

③ $4i$

④ 5

⑤ $1+3i$

해설

$$\begin{aligned} & 4-3i+\frac{3-5i}{1+i}+4i+\frac{-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i} \\ &= 4-3i+4i+\frac{3-5i-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i} \\ &= 4+i-\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= 4+i-\frac{2(1+i)}{1+1}=4+i-1-i=3 \end{aligned}$$

19. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 $z - \bar{z} = 2i$, $\frac{\bar{z}}{z} = -i$ 가 성립할 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 5

④ 8

⑤ 13

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수) 로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

$z - \bar{z} = 2i$ 에서 $a + bi - (a - bi) = 2i$, $2bi = 2i$

$\therefore b = 1$

$\frac{\bar{z}}{z} = -i$ 에서 $\frac{a - i}{a + i} = -i$

$$\frac{(a - i)^2}{a^2 + 1} = -i, \frac{a^2 - 1 - 2ai}{a^2 + 1} = -i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

(i) 실수부분이 0이어야 하므로

$$\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} = 0, a^2 - 1 = 0$$

$$\therefore a = \pm 1 \quad \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

(ii) 허수부분이 -1이어야 하므로

$$\frac{-2a}{a^2 + 1} = -1, a^2 + 1 = 2a$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0, (a - 1)^2 = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $a = 1$

$$\therefore z \cdot \bar{z} = (1 + i)(1 - i) = 1 + 1 = 2$$

20. α, β 를 복소수라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\alpha + \beta i = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$

② $\alpha + \beta i = r + \delta i$ 이면 $\alpha = r, \beta = \delta$

③ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$

④ $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$

⑤ $\alpha^2 < 0$

해설

① $\alpha = 1, \beta = i$ 이면 $\alpha + \beta i = 1 + i^2 = 0$ 이지만 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 이다.

② $\alpha = 1, \beta = 1$ 이면 $\alpha + \beta i = 1 + i$ 이고, $r = 2, \delta = -1 + i$ 이면 $r + \delta i = 1 + i$ 에서 $\alpha + \beta i = r + \delta i$ 이지만 $\alpha \neq r, \beta \neq \delta$ 이다.

③ $\alpha = 1, \beta = i$ 이면 $\alpha^2 + \beta^2 = 1 + i^2 = 0$ 이지만 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 이다.

④ $\alpha \neq 0$ 이고 $\beta \neq 0$ 이라 가정하고 $\alpha\beta = 0$ 의 양변에 $\frac{1}{\alpha}$ 을 곱하면 $\beta = 0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$ 이다.

⑤ (순허수)² < 0 이나 $\alpha = 1 + i$ 이면 $\alpha^2 = (1 + i)^2 = 2i$ 가 되어 양수도 음수도 아니다.

따라서 옳은 것은 ④이다.