

1. 복소수 $z = (2+i)a^2 + (1+4i)a + 2(2i-3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

① -2

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{2}$

⑤ 3

해설

$$z = (2a^2 + a - 6) + (a^2 + 4a + 4)i$$

$$\text{순허수이므로 } 2a^2 + a - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (a+2)(2a-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

그런데 $a = 2$ 이면,

$$a^2 + 4a + 4 = 0 \text{이 되어 순허수가 성립되지 않는다.}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

2. 실수 x, y 에 대하여, 등식 $2x + y + (x - 3y)i = 3 + 2i$ 가 성립할 때, $\frac{x}{y}$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x + y = 3, x - 3y = 2$ 이므로

$$x = \frac{11}{7}, y = -\frac{1}{7}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{11}{7} \times -\frac{7}{1} = -11$$

3. 실수 x, y 에 대하여 $x + y + (xy - 1)i = 2 + i$ 일 때 $x^2 + y^2$ 의 값은?

① 4

② 2

③ 1

④ 0

⑤ -1

해설

$$\begin{aligned}x + y &= 2, \quad xy - 1 = 1 \quad \therefore xy = 2 \\ \therefore x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy = 0\end{aligned}$$

4. 등식 $3x - 2yi = (2 + i)^2$ 이 성립하는 x, y 에 대하여 두 수를 곱하면?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$3x - 2yi = (2 + i)^2 = 3 + 4i$$

$$x = 1, \quad y = -2$$

$$\therefore xy = -2$$

5. 등식 $\frac{a}{1+i} + \frac{b}{1-i} = -5$ 를 만족하는 두 실수 $a+b$ 의 값을 구하시오
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$ 를 곱하면

$$a(1-i) + b(1+i) = -10, (a+b) + (b-a)i = -10$$

$$\therefore a+b = -10, b-a = 0$$

6. a, b 가 실수일 때, $(a + 2i)(3 + 4i) + 5(1 - bi) = 0$ 을 만족하는 a, b 의 값의 합은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$(a + 2i)(3 + 4i) + 5(1 - bi) = 0 \text{에서}$$

$$(3a - 3) + (4a - 5b + 6)i = 0$$

a, b 가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $3a - 3 = 0$, $4a - 5b + 6 = 0$

$$\therefore a = 1, b = 2$$

따라서 $a + b = 3$ 이다.

7. 복소수 $z = (1+i)x^2 + x - (2+i)$ 가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -1 ② 1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 2

해설

복소수 z 를 $a + bi$ (a, b 는 실수)의 꼴로 정리하면
 $z = (x^2 + x - 2) + (x^2 - 1)i$
이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.
즉, $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$
한편, $x = 1$ 이면 $z = 0 + 0i = 0$ 이므로
 $z \neq 0$ 라는 조건에 맞지 않는다.
 $\therefore x = -1$

8. 복소수 $(1+i)x^2 - (1-4i)x - (2-3i)$ 가 실수일 때의 x 값과 순허수일 때의 x 값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$$(x^2 - x - 2) + (x^2 + 4x + 3)i$$

실수가 되기 위해서는 $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$(x + 1)(x + 3) = 0 \therefore x = -3, -1$$

순허수가 되기 위해서는

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ 이고 } x^2 + 4x + 3 \neq 0$$

$$x = -1, 2 \text{ 이고 } x \neq -3, -1 \therefore x = 2$$

$$(-3) \times (-1) \times 2 = 6$$

9. 복소수 $z = (1+i)x + 1 - 2i$ 에 대하여 z^2 이 음의 실수일 때, 실수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

해설

$$z = (1+i)x + 1 - 2i = (x+1) + (x-2)i$$

z^2 의 음의실수 $\Leftrightarrow z$ 가 순허수

$$\therefore x+1=0, \quad x=-1$$

10. 복소수 $(1 - xi)(1 - i)$ 가 순허수가 되도록 실수 x 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$(1 - xi)(1 - i) = (1 - x) + (-1 - x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1 - x = 0,$
 $x = 1$

11. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k + i) - k(1 - i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$z = 3(k + i) - k(1 - i)^2$ 를 정리하면

$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3 + 2k)i$

이것이 순허수이려면 $3k = 0$, $3 + 2k \neq 0$

$k = 0$ 이므로 $z = 3i$, $\bar{z} = -3i$

$\therefore z \cdot \bar{z} = 3i \cdot -3i = 9$

12. $i^2 = -1$ 일 때, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 n 의 개수는?

- ① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$$(n+i)^4 = \{(n+i)^2\}^2 = (n^2 - 1 + 2ni)^2$$

이것이 정수가 되려면 $n^2 - 1 + 2ni$ 가 정수가 되거나 순허수가 되어야 한다.

i) $n = 0$ 일 때 성립

ii) $n^2 - 1 = 0$, $n = \pm 1$ 일 때 성립

따라서 구하는 정수의 개수는 3 개

해설

$$(n+i)^4 = n^4 - 6n^2 + 1 + i(4n^3 - 4n)$$

이것이 실수이려면, $4n^3 - 4n = 0$, $n = 0$, ± 1

이 때 $(n+i)^4$ 은 모두 정수가 되므로, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 n 의 개수는 3 개다.

13. $(3 + 4i)^5(15 - 20i)^5$ 을 간단히 하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① 5^7 ② 5^{10} ③ 5^{12} ④ 5^{15} ⑤ 5^{20}

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 5^5(3 + 4i)^5(3 - 4i)^5 \\&= 5^5\{(3 + 4i)(3 - 4i)\}^5 \\&= 5^5(5^2)^5 \\&= 5^{15}\end{aligned}$$

14. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 $z - \bar{z} = 2i$, $\frac{\bar{z}}{z} = -i$ 가 성립할 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 5 ④ 8 ⑤ 13

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수) 로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$
 $z - \bar{z} = 2i$ 에서 $a + bi - (a - bi) = 2i$, $2bi = 2i$
 $\therefore b = 1$
 $\frac{\bar{z}}{z} = -i$ 에서 $\frac{a-i}{a+i} = -i$
 $\frac{(a-i)^2}{a^2+1} = -i$, $\frac{a^2-1-2ai}{a^2+1} = -i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
(i) 실수부분이 0이어야 하므로
 $\frac{a^2-1}{a^2+1} = 0$, $a^2-1 = 0$
 $\therefore a = \pm 1$... ㉠
(ii) 허수부분이 -1이어야 하므로
 $\frac{-2a}{a^2+1} = -1$, $a^2+1 = 2a$
 $a^2-2a+1 = 0$, $(a-1)^2 = 0$
 $\therefore a = 1$... ㉡
따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $a = 1$
 $\therefore z \cdot \bar{z} = (1+i)(1-i) = 1+1 = 2$

15. $(1 + 3i)(1 - 3i) - (2 - i)(3 + i)$ 를 계산하면?

- ① $17 - i$ ② $3 + i$ ③ $3 - i$ ④ $7 + i$ ⑤ $7 - i$

해설

$$\begin{aligned} & (1 + 3i)(1 - 3i) - (2 - i)(3 + i) \\ &= (1 + 9) - (6 - i + 1) \\ &= 3 + i \end{aligned}$$