1. 1부터 800까지의 자연수 중에서 800과 서로소인 수의 개수를 구하면?

① 310개 ② 320개 ③ 330개
④ 340개 ⑤ 350개

해설

$800 = 2^5 \times 5^2$ 으로 소인수분해가 된다.
800과 서로소가 되려면 2나 5를 인수로 가져서는 아니되므로 1부터 800까지의 수 중에서 2 또는 5의 배수의 개수를 계산하여 여사건을 이용하면 된다.
2의 배수의 집합을 A, 5의 배수의 집합을 B라 하면
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$= 400 + 160 - 80 = 480$
따라서 800과 서로 소인수의 개수는
$800 - 480 = 320$(개) 이다.

2. 180 의 양의 약수 중 3 의 배수의 개수는?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$180 = 3 \times 60$ 따라서 60 의 약수의 개수를 구하면 된다.
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 이므로
약수의 개수 : $(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$

3. $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 을 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수 중에서 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 모두 3 의 배수인 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 48 개

해설

일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 모두 3 의 배수인 경우는 다음 두 가지이다.

□□□3□6, □□□6□3

이때, 나머지 네 자리에 1, 2, 4, 5 의 숫자를 배열하는 방법의 수는

각각 $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$(가지)

따라서, 구하는 자연수는 모두 $2 \times 24 = 48$(개) 이다.

4. 세 자리의 정수 중 0이 반드시 포함된 세 자리 정수는 모두 몇 가지인가?

① 150 ② 171 ③ 180 ④ 187 ⑤ 210

해설

0 이 반드시 포함된 경우라는 것은 0 이 적어도 하나 포함된 경우로 해석이 가능하므로 여사건을 이용한다.
세 자리 정수이므로 백의 자리에 가능한 수는 9 가지,
십의 자리 수는 10 가지, 일의 자리 수는 10가지 이므로 총 900 가지
여기에서 여사건인 0 이 하나도 포함되지 않는 경우를 빼면 된다.
이것은 세 자리 수 모두 1 에서 9 사이의 수로 구성된 경우이다.
$\therefore 900 - 9^3 = 900 - 729 = 171$

5. 어느 동물원에서 그림과 같이 번호가 적혀 있는 6 칸의 동물 우리에 호랑이, 사자, 늑대, 여우, 원숭이, 곰을 각각 한 마리씩 넣을 때, 호랑이와 사자는 이웃하지 않게 넣으려고 한다. 예를 들어, <1> 의 경우에는 <2> 와 <4> 가 이웃하는 우리이고, <3>, <5>, <6> 은 이웃하지 않는 우리이다. 이때, 6 마리의 동물들을 서로 다른 우리에 각각 넣는 방법의 수는?

$\langle 1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 3 \rangle$
$\langle 4 \rangle$	$\langle 5 \rangle$	
$\langle 6 \rangle$		

① 112 ② 120 ③ 184 ④ 216 ⑤ 432

해설

(호랑이, 사자) 가 이웃하지 않는 경우는 9 가지
즉, $(1,3), (1,5), (1,6), (2,4), (2,6), (3,4), (3,5)$, $(3,6), (5,6)$ 이고
서로 바꾸는 경우의 수가 2가지 이므로 구하는 방법의 수는
$9 \times 2 \times 4! = 432$

6. 100 원짜리 동전 2 개, 50 원짜리 동전 3 개, 10 원짜리 동전 4 개를 사용하여 거스름돈 없이 지불하는 경우에 지불방법의 수를 a, 지불금액의 수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 98 가지

해설

10 원, 50 원, 100 원짜리 동전을 각각 x 개, y 개, z 개 사용한다고 하면,

1) 지불방법의 수는

$x = 0, 1, 2, 3, 4$

$y = 0, 1, 2, 3$

$z = 0, 1, 2$

중에서 $x = y = z = 0$ 을 제외한 지불방법의 총 가짓수 a 는,

$a = 5 \times 4 \times 3 - 1 = 59$ (가지)

2) 지불금액의 수를 구할 때 50 원짜리가 3 개이므로 이 중 2 개를 합하면 100 원짜리 하나와 같으므로 100 원짜리 동전 2 개를 50 원짜리 동전 4 개로 바꾸어 생각한다.

즉, 50 원짜리 7 개, 10 원짜리 4 개로 계산하는 금액과 동일하다.

$x = 0, 1, 2, 3, 4$

$y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

중에서 $x = y = z = 0$ 을 제외한 지불금액의 총 가짓수 b 는,

$b = 5 \times 8 - 1 = 39$

$\therefore a + b = 59 + 39 = 98$

해설

a 를 구하기 위하여 동전 1 개, 2 개, $\cdots\cdots$ 9 개로 각각 만들 수 있는 금액의 경우를 알아보면,

동전 1 개 $\Rightarrow$ $10, 50, 100$

동전 2 개 $\Rightarrow$ $20, 60, 100, 110, 150, 200$

동전 3 개 $\Rightarrow$ 30, 70, 110, 120, 150, 160, 200, 210, 250

동전 4 개 $\Rightarrow$ 40, 80, 120, 130, 160, 170, 210, 220, 250, 260, 300

동전 5 개 $\Rightarrow$ 90, 130, 140, 170, 180, 220, 230, 260, 270, 310, 350

동전 6 개 $\Rightarrow$ 140, 180, 190, 230, 240, 270, 280, 320, 360

동전 7 개 $\Rightarrow$ $190, 240, 280, 290, 330, 370$

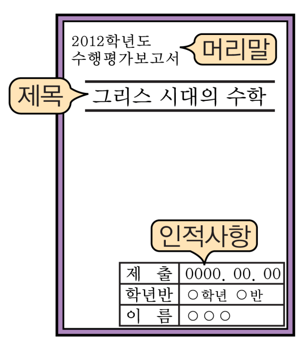
동전 8 개 $\Rightarrow$ $290, 340, 380$

동전 9 개 $\Rightarrow$ 390

이상에서, 지불방법의 총 가짓수 a 는,

$a = 3 + 6 + 9 + 11 + 11 + 9 + 6 + 3 + 1 = 59$ (가지)

7. 다음 그림은 어떤 학생이 작성한 수행평가 보고서의 표지이다.



구분	글꼴
머리말	중고딕, 견고딕, 굴림체
제목	중고딕, 견고딕, 굴림체, 신명조, 견명조, 바탕체
인적사항	신명조, 견명조, 바탕체

머리말, 제목, 인적사항에 서로 다른 글꼴을 표기할 때, 가능한 방법은 몇가지인지 구하여라.

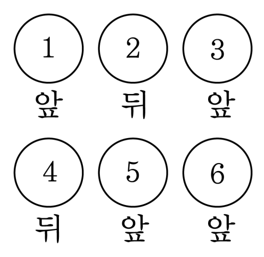
▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 36 가지

해설

머리말과 인적사항의 글꼴들은 모두 다르므로 머리말의 글꼴을 선택하는 경우의 수는 3 가지,
인적사항의 글꼴을 선택하는 경우의 수는 3 가지이다.
제목의 글꼴을 선택하는 경우의 수는 머리말, 인적사항의 글꼴을 제외한 4 가지이므로
전체 경우의 수는 $3 \times 3 \times 4 = 36$

8. 다음 그림과 같이 1부터 6까지의 번호가 붙어 있는 동전 6개 중에서 2개를 뒤집어서 앞면과 뒷면의 개수가 변하지 않게 하려 한다. 서로 다른 방법은 모두 몇 가지 있는가?



① 4가지　　② 8가지　　③ 12가지
④ 16가지　　⑤ 24가지

해설

앞면과 뒷면의 개수가 변하지 않으려면, 앞면 하나와 뒷면 하나를 뒤집어야 한다.
따라서 $4 \times 2 = 8$ 가지

9. 2000 의 양의 약수 중 제곱수가 아니면서 짝수인 것의 개수는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$2000 = 2^4 \cdot 5^3$ 의 양의 약수는
$2^j \cdot 5^k (0 \le j \le 4, 0 \le k \le 3)$ 의 형태이다.
그러므로 제곱수가 아니면서 짝수인 것은
$2 \cdot 5^k (k = 0, 1, 2, 3)$
$2^2 \cdot 5^k\ (k = 1,\ 3)$
$2^3 \cdot 5^k\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$
$2^4 \cdot 5^k (k = 1, 3)$ 의 형태이므로
구하는 개수는 $4 + 2 + 4 + 2 = 12$ (개)

10. $1, 2, 3, 4, 5$ 를 일렬로 배열할 때, i 번째 숫자를 a_i 라고 하자. 이러한 배열 중 $a_i \neq i$ 를 만족하는 것의 개수를 구하시오. (단, $1 \leq i \leq 5$)

▶ 답 : ____________ 개

▷ 정답 : 44 개

해설

a_1 의 가능한 경우는 $2, 3, 4, 5$ 의 4 가지이다.
$a_1 = 2$ 인 경우 다음 수형도로부터 11 개이다.

a_1	2										
a_2	1		3			4			5		
a_3	4	5	1	4	5	1	5		4		1
a_4	5	3	5	5	1	5	1	3	1	1	3
a_5	3	4	4	1	4	3	3	1	3	3	4

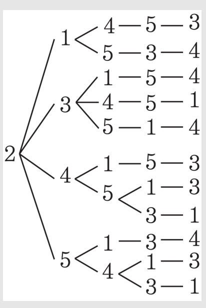
$a_1 = 3, 4, 5$ 인 경우도 마찬가지로 각각 11 개가 있으므로 구하는 경우의 수는 $4 \times 11 = 44$ (개) 임을 알 수 있다.

11. $1, 2, 3, 4, 5$ 를 일렬로 배열할 때 i 번째 숫자를 $a_i(1 \leq i \leq 5)$ 라고 하면$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)(a_4 - 4)(a_5 - 5) \neq 0$ 인 경우의 수는 몇 가지인지 구하시오.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 44 가지

해설



$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)\ (a_4 - 4)(a_5 - 5) \neq 0$ 인 것은 $a_1 \neq 1, a_2 \neq 2, a_3 \neq 3, a_4 \neq 4, a_5 \neq 5$ 인 것을 뜻한다.
$a_1 \neq 1$ 이므로 $a_1 = 2, 3, 4, 5$ 인 경우에 따라서 조사한다.
$a_2 \neq 2$ 인 경우 $a_2 = 1, 3, 4, 5$ 의 네 가지 경우가 있으며, 위 수형도와 같이 조사해 보면 모두 11 가지가 있다.
$a_1 = 3, 4, 5$ 인 경우도 마찬가지이므로 구하는 모든 경우의 수는 $4 \times 11 = 44$ (가지)