

1. 수직선 위의 점 A (-2) , B (-1) , C (5)가 있을 때, 두 점 사이의 거리 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 를 구하면?

① $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 5$

② $\overline{AB} = 1$, $\overline{BC} = 5$

③ $\overline{AB} = 1$, $\overline{BC} = 6$

④ $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 6$

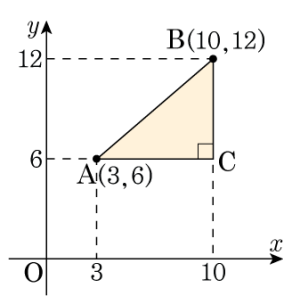
⑤ $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 4$

해설

$$\overline{AB} = -1 - (-2) = 1$$

$$\overline{BC} = 5 - (-1) = 6$$

2. 다음 좌표 평면 위의 두 점 A(3, 6), B(10, 12) 사이의 거리를 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 구하여라.



$$\begin{aligned} &(\text{두 점 A, B 사이의 거리}) = \overline{AB} \\ \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \\ &= (10 - 3)^2 + (12 - 6)^2 \\ &= 49 + 36 \\ &= 85 \\ \therefore \overline{AB} &= \square \end{aligned}$$

- ① $3\sqrt{5}$ ② 6 ③ $6\sqrt{7}$ ④ 8 ⑤ $\sqrt{85}$

해설

$$\begin{aligned} &(\text{두 점 A, B 사이의 거리}) = \overline{AB} \\ \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \\ &= (10 - 3)^2 + (12 - 6)^2 \\ &= 49 + 36 = 85 \end{aligned}$$

3. $\overline{AB} = 7$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 5$ 인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{BC}$ 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{AM}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{21}$

해설

$\overline{BM} = 4$, $\overline{AM} = x$ 이므로 중선정리에 의해
 $7^2 + 5^2 = 2(x^2 + 4^2) \therefore x = \sqrt{21}$

4. 두 점 $A(-2, -4)$, $B(3, 2)$ 에서 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

② $\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$

③ $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

④ $(-7, -10)$

⑤ $(1, 3)$

해설

외분점 구하는 공식을 이용한다.

$$\left(\frac{1 \times 3 - 2 \times (-2)}{1 - 2}, \frac{1 \times 2 - 2 \times (-4)}{1 - 2}\right)$$

$$= (-7, -10)$$

5. 세 점 A(6, -1), B(-1, 2), C(4, 3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 (m, n) 이라 할 때, mn 의 값은?

① 4

② $\frac{13}{3}$

③ $\frac{14}{3}$

④ 5

⑤ $\frac{16}{3}$

해설

무게중심

$$G\left(\frac{6+(-1)+4}{3}, \frac{-1+2+3}{3}\right) = \left(3, \frac{4}{3}\right)$$

$$\therefore mn = 4$$

6. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 인 $\triangle ABC$ 가 $\angle A$ 가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 가 직각이므로

피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \dots \textcircled{1}$$

이때, 세 점 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 에 대하여

$$\overline{AB}^2 = (-1 - a)^2 + (-5 - 3)^2 = a^2 + 2a + 65$$

$$\overline{CA}^2 = (a - 3)^2 + (3 - 7)^2 = a^2 - 6a + 25$$

$$\overline{BC}^2 = (3 + 1)^2 + (7 + 5)^2 = 160 \text{ 이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{에 의해 } 2a^2 - 4a + 90 = 160$$

$$\therefore a^2 - 2a - 35 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a 의 값들의 합은 2 이다.

7. A (4, 7), B (3, 2), C (5, 3), D (x, y)에 대하여 사각형 ABCD가 평행 사변형일 때, $y - x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

$$\therefore x+3=9, y+2=10$$

$$\therefore x=6, y=8$$

8. 두 점 $A(-2, -3)$, $B(2, 1)$ 을 지나는 직선에 평행하고, 점 $(2, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = x + 1$

② $y = x - 1$

③ $y = -x + 1$

④ $y = -x - 1$

⑤ $y = x$

해설

기울기가 m 이고, 점 (x_1, y_1) 을 지나는 직선의 방정식은 $y - y_1 = m(x - x_1)$

두 점 $A(-2, -3)$, $B(2, 1)$ 을 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{1 - (-3)}{2 - (-2)} = 1 \text{ 이므로,}$$

구하는 직선의 방정식은

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 2)$$

$$\therefore y = x - 1$$

9. 일차함수 $y = (a - 2)x + b + 2$ 의 그래프가 x 축의 양의 방향과 45° 의 각을 이루고, y 절편이 5 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① 0

② 3

③ 6

④ -6

⑤ -3

해설

$y = (a - 2)x + b + 2$ 의 그래프가
 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가
 45° 이므로
 $a - 2 = \tan 45^\circ = 1$ 에서 $a = 3$
또, y 절편이 5 이므로
 $b + 2 = 5$ 에서 $b = 3$
 $\therefore a + b = 6$

10. 세 점 $A(-1, 1)$, $B(2, -3)$, $C(k, k-1)$ 이 같은 직선위에 있도록 상수 k 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{7}$

② $\frac{2}{7}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $-\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{3}{5}$

해설

세 점이 같은 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$\Rightarrow \overline{BC}$ 의 기울기 = $\overline{AB}$ 의 기울기

$$\Rightarrow \frac{k-1+3}{k-2} = \frac{-3-1}{2-(-1)}$$

$$\Rightarrow k = \frac{2}{7}$$

11. $ab < 0$, $ac > 0$ 일 때, 직선 $ax + by + c = 0$ 이 지나지 않는 사분면은?

- ① 제 1, 2 사분면 ② 제 1, 3 사분면 ③ 제 2, 4 사분면
④ 제 2 사분면 ⑤ 제 4 사분면

해설

$ab < 0$, $ac > 0$ 이므로 $b \neq 0$ 이다.

따라서, 주어진 직선의 방정식을 b 로 나

누어 정리하면

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$(\text{기울기}) = -\frac{a}{b} > 0$$

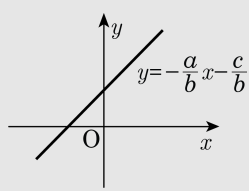
한편, $ab < 0$, $ac > 0$ 이므로

$$ab \cdot ac = a^2bc < 0$$

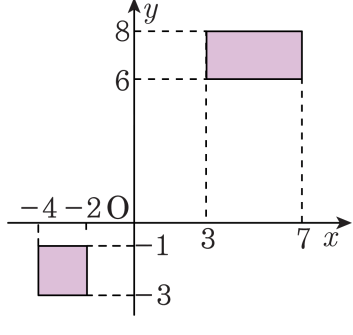
따라서 $bc < 0$

$$(y \text{ 절편}) = -\frac{c}{b} > 0$$

따라서, 주어진 직선은 제 1, 2, 3 사분면을 지나고 제 4 사분면은 지나지 않는다.



12. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 정사각형과 직사각형이 놓여 있다. 이 정사각형과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 기울기는?



- ① $\frac{9}{10}$
- ② $\frac{9}{8}$
- ③ $\frac{8}{7}$
- ④ $\frac{4}{3}$
- ⑤ 1

해설

직사각형 ABCD 에서 두 대각선의 교점을 M이라 하자.
점 M을 지나는 임의의 직선 l 이 직사각형과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하면
 l 의 기울기에 관계없이 $\triangle BMQ = \triangle DMP$ 이므로,
M을 지나는 임의의 직선은 직사각형의 넓이를 이등분한다.
정사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(-3, -2)$
직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(5, 7)$ 이므로
두 점을 지나는 직선의 기울기는
$$\frac{7 - (-2)}{5 - (-3)} = \frac{9}{8}$$

13. 삼각형 ABC의 외접원의 중심 P가 x 축 위에 있고, 두 점 A,B의 좌표가 각각 A(-2,1),B(3,4) 일 때, 점 P의 x 좌표는?

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

해설

점 P가 삼각형 ABC의 외접원의 중심이므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$

점 P의 좌표를 $(a, 0)$ 으로 놓으면

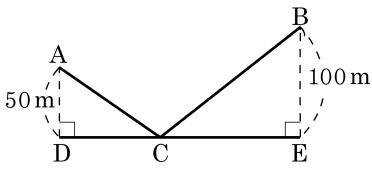
$$\sqrt{(a+2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (-4)^2}$$

양변 제곱하여 정리하면

$$a^2 + 4a + 5 = a^2 - 6a + 25, 10a = 20$$

$$\therefore a = 2$$

14. 다음 그림과 같이 고압 전선 $\overline{DE}$ 가 지나는 곳으로부터 각각 50 m, 100 m 떨어진 두 지점에 빌딩 A, B가 위치하고 있다. 변압기를 D와 E 사이의 한 지점에 설치하여 빌딩 A, B에 전력을 공급하려고 한다. D와 E 사이의 거리가 200 m일 때, 전체 전선의 길이 $\overline{AC} + \overline{BC}$ 의 최솟값을 구하여라.

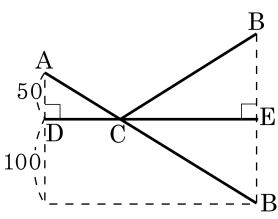


▶ 답 : m

▷ 정답 : 250 m

해설

B를 $\overline{DE}$ 에 대해 대칭이동한 점을 B' 이라 하면
 $\overline{BC} = \overline{CB'}$ 이므로
 $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AC} + \overline{CB'} \geq \overline{AB'}$
 따라서 $\overline{AC} + \overline{BC}$ 의 최솟값은
 $\overline{AB'} = \sqrt{200^2 + 150^2} = 250(\text{m})$



15. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m, 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답: m

▶ 정답 : 30m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$
 $\therefore a = 30(\text{m})$

16. 세 점 A(2,1), B(1,3), C(2,0)에 대하여 $2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

- ① $x - y + 1 = 0$
- ② $x + 2y + 3 = 0$
- ③ $x - 3y - 2 = 0$
- ④ $x - 4y + 5 = 0$
- ⑤ $x - 5y + 4 = 0$

해설

점 P의 좌표를 (x,y)라 하면
 $\overline{AP}^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$
 $\hspace{1.5cm} = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$
 $\hspace{1.5cm} = x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5$
 $\overline{BP}^2 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2$
 $\hspace{1.5cm} = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9$
 $\hspace{1.5cm} = x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10$
 $\overline{CP}^2 = (x - 2)^2 + y^2$
 $\hspace{1.5cm} = x^2 - 4x + 4 + y^2$
 $\hspace{1.5cm} = x^2 - 4x + y^2 + 4$
 $2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$ 에서
 $2(x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5) + x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 =$
 $3(x^2 - 4x + y^2 + 4)$
 $3x^2 - 10x + 3y^2 - 10y + 20 = 3x^2 - 12x + 3y^2 + 12$
 $2x - 10y + 8 = 0$
 $\therefore x - 5y + 4 = 0$

17. 두 점 A(-2, 0), B(1, -1)에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하면?

- ㉠ P $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ㉡ P (-1, -1) ㉢ P (0, 0)
㉣ P $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ㉤ P (1, 1)

해설

점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (x+2)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 \\ &= 2x^2 + 2x + 2y^2 + 2y + 6 \\ &= 2(x^2 + x) + 2(y^2 + y) + 6 \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 5\end{aligned}$$

따라서 $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 된다.

$$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

18. 세 점 $A(4, -5)$, $B(-5, 2)$, $C(-8, 3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $\triangle ABC$ 에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값이 최소가 될 때, 점 P의 좌표는?

① $(-3, -3)$

② $(-3, 0)$

③ $(0, 0)$

④ $(3, 0)$

⑤ $(3, 3)$

해설

P(x, y)라 하면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

$$= (x-4)^2 + (y+5)^2 + (x+5)^2 + (y-2)^2 + (x+8)^2 + (y-3)^2$$

$$= 3(x+3)^2 + 3y^2 + 116$$

따라서 $x = -3, y = 0$ 일 때, $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 은 최소가 된다.

19. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle OAB$ 의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

$$y = \frac{-2 - (-3)}{4 - 2}(x - 2) - 3 = \frac{1}{2}x - 4$$

$\Rightarrow x$ 절편은 8이고, y 절편은 -4 이다.

$\therefore \triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16 \text{ 이다.}$$

20. 「 m, n 을 서로소인 자연수라 할 때, 좌표평면위의 두 점 $P(m, 0)$, $Q(0, n)$ 을 잇는 선분 PQ 위에는 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수인 점이 존재하지 않는다.」를 다음과 같이 증명하였다.

<증명>

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 방정식은

(가)

 이다. 따라서 $nx + my = mn$ ($0 < x < m, 0 < y < n$) 을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면 $my = n(m - x)$ 좌변이 m 의 배수이므로 우변도 m 의 배수이고, m, n 이 서로소이므로

(나)

 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0 < m - x < \div(다)$

 에 모순이다.

위

의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① $nx + my = 1, m - x, m$

② $nx + my = 1, m + x, 2m$

③ $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, m - x, m$

④ $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, m + x, 2m$

⑤ $nx + my = 1, m + x, n$

해설

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 x 절편, y 절편이 각각 m, n 이므로
 $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \Leftrightarrow nx + my = mn \cdots \cdots \textcircled{가}$
 $\textcircled{가}$ 을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면
 $my = n(m - x)$ 에서 m, n 이 서로소이므로 $m - x$ 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0 < m - x < m$ 에 모순이다.

21. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1, 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2$