1. 수직선 위의 점 A (-2) , B (-1) , C (5)가 있을 때, 두 점 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$를 구하면?

① $\overline{\mathrm{AB}} = 2$, $\overline{\mathrm{BC}} = 5$

② $\overline{\mathrm{AB}} = 1$, $\overline{\mathrm{BC}} = 5$

③ $\overline{\mathrm{AB}} = 1$, $\overline{\mathrm{BC}} = 6$

④ $\overline{\mathrm{AB}} = 2$, $\overline{\mathrm{BC}} = 6$

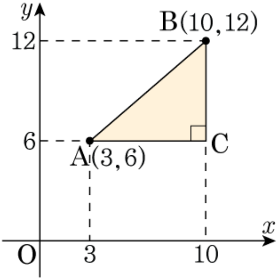
⑤ $\overline{\mathrm{AB}} = 2$, $\overline{\mathrm{BC}} = 4$

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = -1 - (-2) = 1$

$\overline{\mathrm{BC}} = 5 - (-1) = 6$

2. 다음 좌표평면 위의 두 점 A(3, 6), B(10, 12) 사이의 거리를 구하는 과정이다. $\square$ 안에 알맞은 수를 구하여라.



(두 점 A, B 사이의 거리)$=\overline{AB}$

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$$
$$=(10-3)^2+(12-6)^2$$
$$=49+36$$
$$=85$$

$\therefore \overline{AB}=\square$

① $3\sqrt{5}$ ② 6 ③ $6\sqrt{7}$ ④ 8 ⑤ $\sqrt{85}$

해설

(두 점 A, B 사이의 거리)$=\overline{AB}$

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$$
$$=(10-3)^2+(12-6)^2$$
$$=49+36=85$$

3. $\overline{AB}=7,\ \overline{BC}=8,\ \overline{AC}=5$ 인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{BC}$ 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{AM}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{21}$

해설

$\overline{BM}=4,\ \overline{AM}=x$이므로 중선정리에 의해
$7^2+5^2=2(x^2+4^2)\ \therefore\ x=\sqrt{21}$

4. 두 점 $A(-2,-4)$, $B(3,2)$ 에서 선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$　② $\left(-\frac{1}{3},\ 2\right)$　③ $\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$

④ $(-7,\ -10)$　⑤ $(1,\ 3)$

해설

외분점 구하는 공식을 이용한다.

$$\left(\frac{1\times3-2\times(-2)}{1-2},\ \frac{1\times2-2\times(-4)}{1-2}\right)$$

$$=(-7,-10)$$

5. 세 점 $A(6,-1)$, $B(-1,2)$, $C(4,3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 $(m,\ n)$이라 할 때, mn의 값은?

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$

해설

무게중심

$$G\left(\frac{6+(-1)+4}{3},\ \frac{-1+2+3}{3}\right)=\left(3,\frac{4}{3}\right)$$

$\therefore\ mn=4$

6. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (-1-a)^2 + (-5-3)^2 = a^2 + 2a + 65$

$\overline{\mathrm{CA}}^2 = (a-3)^2 + (3-7)^2 = a^2 - 6a + 25$

$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (3+1)^2 + (7+5)^2 = 160$ 이므로

㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$

$\therefore\ a^2 - 2a - 35 = 0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

7. A $(4, 7)$, B $(3, 2)$, C $(5, 3)$, D (x, y)에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, $y-x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

$\therefore \quad x+3=9,\ y+2=10$

$\therefore \quad x=6,\ y=8$

8. 두 점 $A(-2,\ -3)$, $B(2,\ 1)$ 을 지나는 직선에 평행하고, 점 $(2,\ 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=x+1$　　② $y=x-1$　　③ $y=-x+1$

④ $y=-x-1$　　⑤ $y=x$

해설

기울기가 m 이고, 점$(x_1,\ y_1)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$

두 점 $A(-2,\ -3)$, $B(2,\ 1)$ 을 지나는 직선의 기울기가

$\dfrac{1-(-3)}{2-(-2)}=1$ 이므로,

구하는 직선의 방정식은

$y-1=1\cdot(x-2)$

$\therefore\ y=x-1$

9. 일차함수 $y=(a-2)x+b+2$ 의 그래프가 x 축의 양의 방향과 45^o 의 각을 이루고, y 절편이 5 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① 0 ② 3 ③ 6 ④ -6 ⑤ -3

해설

$y=(a-2)x+b+2$ 의 그래프가
x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가
$45°$ 이므로
$a-2=\tan 45°=1$ 에서 $a=3$
또, y 절편이 5 이므로
$b+2=5$ 에서 $b=3$
$\therefore\ a+b=6$

10. 세 점 $A(-1,1)$, $B(2,-3)$, $C(k,k-1)$이 같은 직선위에 있도록 상수 k의 값을 구하면?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

해설

세 점이 같은 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$\Rightarrow$ $\overline{BC}$의 기울기$=$ $\overline{AB}$의 기울기

$$\Rightarrow \quad \frac{k-1+3}{k-2} = \frac{-3-1}{2-(-1)}$$

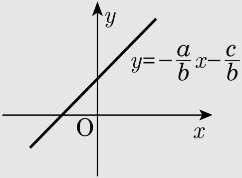
$$\Rightarrow \quad k = \frac{2}{7}$$

11. $ab < 0,\ ac > 0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나지 <u>않는</u> 사분면은?

① 제 1, 2 사분면 ② 제 1, 3 사분면 ③ 제 2, 4 사분면

④ 제 2 사분면 ⑤ 제 4 사분면

해설



$ab < 0,\ ac > 0$이므로 $b \neq 0$ 이다.
따라서, 주어진 직선의 방정식을 b로 나누어 정리하면

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$(\text{기울기}) = -\frac{a}{b} > 0$$

한편, $ab < 0,\ ac > 0$이므로

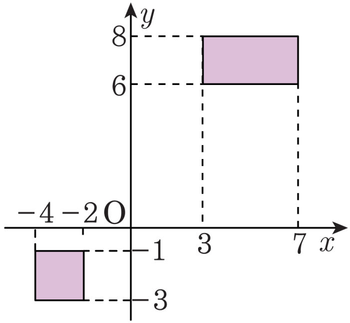
$$ab \cdot ac = a^2bc < 0$$

따라서 $bc < 0$

$$(y\ \text{절편}) = -\frac{c}{b} > 0$$

따라서, 주어진 직선은 제 1, 2, 3 사분면을 지나고 제4 사분면은 지나지 않는다.

12. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 정사각형과 직사각형이 놓여 있다. 이 정사각형과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 기울기는?



① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{8}{7}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

해설

직사각형 ABCD 에서 두 대각선의 교점을 M이라 하자.
점 M을 지나는 임의의 직선 l 이 직사각형과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하면
l의 기울기에 관계없이 $\triangle BMQ = \triangle DMP$ 이므로,
M을 지나는 임의의 직선은 직사각형의 넓이를 이등분한다.
정사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(-3, -2)$
직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(5, 7)$ 이므로
두 점을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{7-(-2)}{5-(-3)} = \frac{9}{8}$$

13. 삼각형 ABC의 외접원의 중심 P가 x축 위에 있고, 두 점 A, B의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(-2, 1), \mathrm{B}(3, 4)$일 때, 점 P의 x좌표는?

① 1　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{7}{3}$

해설

점 P가 삼각형 ABC의 외접원의 중심이므로 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$

점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$으로 놓으면

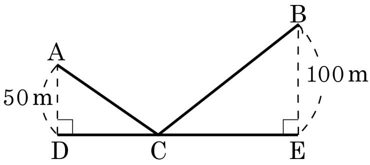
$$\sqrt{(a+2)^2+(-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2+(-4)^2}$$

양변 제곱하여 정리하면

$a^2+4a+5 = a^2-6a+25,\ 10a = 20$

$\therefore\ a = 2$

14. 다음 그림과 같이 고압 전선 $\overline{DE}$가 지나는 곳으로부터 각각 $50\,m, 100\,m$ 떨어진 두 지점에 빌딩 A, B가 위치하고 있다. 변압기를 D와 E 사이의 한 지점에 설치하여 빌딩 A, B에 전력을 공급하려고 한다. D와 E 사이의 거리가 $200\,m$일 때, 전체 전선의 길이 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 최솟값을 구하여라.



▶ **답 :** ______ m

▷ **정답 :** 250 m

해설

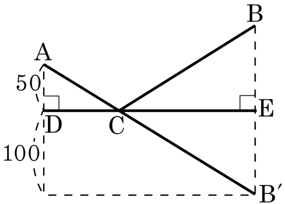
B를 $\overline{DE}$에 대해 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$\overline{BC} = \overline{CB'}$이므로

$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AC} + \overline{CB'} \geq \overline{AB'}$

따라서 $\overline{AC} + \overline{BC}$의 최솟값은

$\overline{AB'} = \sqrt{200^2 + 150^2} = 250(\,m)$



15. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답: ______ m

▷ 정답: 30 m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

$\therefore\ a = 30(\mathrm{m})$

16. 세 점 $\mathrm{A}(2,1), \mathrm{B}(1,3), \mathrm{C}(2,0)$에 대하여 $2\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 = 3\overline{\mathrm{CP}}^2$을 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x - y + 1 = 0$ ② $x + 2y + 3 = 0$ ③ $x - 3y - 2 = 0$

④ $x - 4y + 5 = 0$ ⑤ $x - 5y + 4 = 0$

해설

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2 &= (x-2)^2 + (y-1)^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \\ &= x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BP}}^2 &= (x-1)^2 + (y-3)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \\ &= x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CP}}^2 &= (x-2)^2 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + y^2 + 4\end{aligned}$$

$2\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 = 3\overline{\mathrm{CP}}^2$에서

$2\left(x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\right) + x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 = 3\left(x^2 - 4x + y^2 + 4\right)$

$3x^2 - 10x + 3y^2 - 10y + 20 = 3x^2 - 12x + 3y^2 + 12$

$2x - 10y + 8 = 0$

$\therefore x - 5y + 4 = 0$

17. 두 점 A(−2, 0), B(1, −1)에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하면?

① $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$　② $P(-1, -1)$　③ $P(0, 0)$
④ $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$　⑤ $P(1, 1)$

해설

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2 &= (x+2)^2+y^2+(x-1)^2+(y+1)^2\\ &= 2x^2+2x+2y^2+2y+6\\ &= 2\left(x^2+x\right)+2\left(y^2+y\right)+6\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+5\end{aligned}$$

따라서 $x=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$일 때,

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 된다.

$\therefore P\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

18. 세 점 $A(4,\ -5)$, $B(-5,\ 2)$, $C(-8,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $\triangle ABC$에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 될 때, 점 P의 좌표는?

① (-3, -3)   ② (-3, 0)   ③ (0, 0)

④ (3, 0)   ⑤ (3, 3)

해설

$P(x,\ y)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(x-4)^2+(y+5)^2+(x+5)^2+(y-2)^2+(x+8)^2+(y-3)^2$

$=3(x+3)^2+3y^2+116$

따라서 $x=-3,\ y=0$일 때, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 최소가 된다.

19. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x절편을 A, y절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle$OAB 의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

$$y = \frac{-2-(-3)}{4-2}(x-2) - 3 = \frac{1}{2}x - 4$$

$\Rightarrow$ x절편은 8 이고, y절편은 -4 이다.

$\therefore$ $\triangle$OAB 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ 이다.

20. 「m, n 을 서로소인 자연수라 할 때, 좌표평면위의 두 점 $\mathrm{P}(m,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ n)$ 을 잇는 선분 PQ 위에는 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수인 점이 존재하지 않는다.」를 다음과 같이 증명하였다.

<증명>

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 방정식은
$\boxed{\text{(가)}}$ 이다. 따라서 $nx+my=mn$ $(0<x<m,\ 0<y<n)$ 을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면 $my=n(m-x)$
좌변이 m 의 배수이므로 우변도 m 의 배수이고,
m, n 이 서로소이므로
$\boxed{\text{(나)}}$ 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0<m-x<\boxed{\text{(다)}}$ 에 모순이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① $nx+my=1,\ \ m-x,\ \ m$
② $nx+my=1,\ \ m+x,\ \ 2m$
③ $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1,\ \ m-x,\ \ m$
④ $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1,\ \ m+x,\ \ 2m$
⑤ $nx+my=1,\ \ m+x,\ \ n$

해설

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 x 절편, y 절편이
각각 m, n 이므로

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1 \Leftrightarrow nx+my=mn \ \cdots\cdots \ ㉠$$

㉠을 만족하는 자연수 x, y 가
존재한다고 가정하면
$my=n(m-x)$ 에서 m, n 이 서로소이므로
$m-x$ 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0<m-x<m$ 에 모순이다.

21. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$y=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1,\ 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times \frac{1}{a}=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a=2$