1. 복소수 $\frac{3+i}{1+i}+\frac{a-i}{1-i}$ 가 실수가 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{3+i}{1+i}+\frac{a-i}{1-i}=\frac{(3+i)(1-i)+(1+i)(a-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{4-2i+(a+1)+(a-1)i}{2}$$
$$=\frac{a+5+(a-3)i}{2}$$

위의 식이 실수가 되려면 허수 부분이 0이어야 하므로 $a-3=0$

$\therefore\ a=3$

2. $(3+i)(a+bi) = 1-3i$를 만족하는 실수 a, b에 대하여 $a+b$를 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(3+i)(a+bi) = 1-3i$

$(3a-b)+(a+3b)i = 1-3i$

$\therefore\ 3a-b=1,\quad a+3b=-3$

$\Rightarrow\quad a=0,\quad b=-1$

$\therefore\ a+b=-1$

3. $\dfrac{2+3i}{3-i}$ 를 계산하면?

① $\dfrac{3}{8}+\dfrac{13}{8}i$ ② $\dfrac{3}{10}+\dfrac{11}{10}i$ ③ $\dfrac{3}{10}-\dfrac{11}{10}i$
④ $\dfrac{3}{8}-\dfrac{13}{8}i$ ⑤ $\dfrac{4}{9}+\dfrac{11}{9}i$

해설

$$\frac{2+3i}{3-i}=\frac{(2+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{3}{10}+\frac{11}{10}i$$

4. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\overline{i-2}=i+2$　　② $\overline{2i}=-2i$

③ $\overline{\sqrt{2}+i}=\sqrt{2}-i$　　④ $\overline{1+\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$

⑤ $\overline{3-2i}=3+2i$

해설

결레복소수는 허수부분의 부호가 바뀐다.
실수의 켤레복소수는 자기자신이다.
① $\overline{i-2}=-i-2$

5. 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} = -\sqrt{12}$

② $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} = \sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3} \times \sqrt{4} = -\sqrt{12}$

④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}} = -\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}} = -\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

해설

② $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} = \sqrt{3}i \times \sqrt{4}i = -\sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3} \times \sqrt{4} = \sqrt{3}i \times \sqrt{4} = \sqrt{12}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}} = \sqrt{\dfrac{3}{4}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\dfrac{3}{4}}i$

6. 다항식 $x^4 - 3x^2 + ax + 5$를 $x + 2$로 나누면 나머지가 3이다. a의 값은?

① 0　② 2　③ 3　④ -2　⑤ -3

해설

$x^4 - 3x^2 + ax + 5 = f(x)$라 놓자.
$f(-2) = 3$에서 $-2a + 9 = 3$
$\therefore\ a = 3$

7. 다항식 $f(x)$를 두 일차식 $x-1$, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$ ② $-x+3$ ③ $x-3$
④ $-x-3$ ⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 2, 1이므로
$f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$를 대입하면
$f(1)=a+b=2$, $f(2)=2a+b=1$
두 식을 연립하여 구하면 $a=-1, b=3$
$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

8. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$가 $x - 2$로 나누어 떨어지고 또, $x - 3$으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지려면
$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$
$\therefore\ 4a + 2b + 36 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
또, $f(x)$ 가 $x - 3$ 으로 나누어 떨어지려면
$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$
$\therefore\ 9a + 3b + 93 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -13,\ b = 8$

9. 등식 $3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

① 3　　② -4　　③ 2　　④ 8　　⑤ 6

해설

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$=(x-1)\left\{a(x-1)+b\right\}+c$

$$
\begin{array}{c|ccc}
1 & 3 & 2 & 1 \\
 & & 3 & 5 \\
\hline
1 & 3 & 5 & \boxed{6} \ \leftarrow \ \mathrm{c} \\
 & & 3 & \\
\hline
 & 3 & \boxed{8} \ \leftarrow \mathrm{c} & \\
 & \uparrow & & \\
 & \mathrm{a} & &
\end{array}
$$

해설

$x=1$ 을 대입하면 $c=6$

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+6$

$\rightarrow 3x^2+2x-5=a(x-1)^2+b(x-1)$

$\rightarrow (x-1)(3x+5)=a(x-1)^2+b(x-1)$

$\rightarrow$ 양변을 $x-1$ 로 나누면

$3x+5=a(x-1)+b=ax-a+b$

$\therefore\ a=3,\ b=8$

※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

10. $(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$ 가 순허수일 때, x 의 값은?

① 0　② 1　③ -3　④ 1, 3　⑤ -1

해설

$(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$
$=x^2+x^2i+2x+4xi-3+3i$
$=(x^2+2x-3)+(x^2+4x+3)i$
순허수를 만족하려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$이어야 한다.
$x^2+2x-3=0$이면서, $x^2+4x+3\neq 0$인 x값을 찾아야 한다.
$\therefore x=1$

11. $x = 3 + \sqrt{3}i$, $y = 3 - \sqrt{3}i$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 10 ③ 20 ④ -10 ⑤ -20

해설

$x + y = 6, \quad xy = 12$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= 6^3 - 3 \cdot 12 \cdot 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

12. 두 복소수 $z_1 = a + (3b-1)i$, $z_2 = (b+1) - 5i$에 대하여 $z_1 = \bar{z}_2$가 성립할 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$a + (3b-1)i = (b+1) + 5i$에서

$\begin{cases} a = b+1 \\ 3b-1 = 5 \end{cases}$ 이므로 연립하면

$a = 3,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 5$

13. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -2이고, $x-2$로 나눈 나머지가 1일 때, $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눈 나머지는?

① $2x+1$ ② $x+1$ ③ $x-1$

④ $2x-1$ ⑤ $3x+2$

해설

$f(x) = (x+1)Q_1(x) - 2$
$f(x) = (x-2)Q_2(x) + 1$
$f(x) = (x+1)(x-2)Q_3(x) + ax + b$
$f(-1) = -a + b = -2,\ f(2) = 2a + b = 1$
$\therefore\ a = 1,\ b = -1$
구하는 나머지는 $x-1$

14. 다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 1, 2이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$일 때, $f(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는?

① $Q(3)+3$　② $Q(3)+4$　③ $2Q(3)+3$

④ $2Q(3)+4$　⑤ $Q(3)$

해설

주어진 조건에서 $f(1)=1$, $f(2)=2$이다.

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$라 놓으면

$f(1)=a+b=1$, $f(2)=2a+b=2$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

즉 $f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+x$

$\therefore\ f(3)=2Q(3)+3$

15. 이차 이상의 다항식 $p(x)$를 $x-2007$와 $x-2008$으로 나눈 나머지는 각각 2007와 2008이다. $p(x)$를 $(x-2007)(x-2008)$으로 나눈 나머지는?

① 2007×2008 ② $2007x$

③ $2008x$ ④ $x-2007 \times 2008$

⑤ x

해설

$p(x)$를 $(x-2007)(x-2008)$으로 나눌 때의 몫과 나머지를 각각 $q(x)$와 $ax+b$라 놓으면

$p(x)=(x-2007)(x-2008)q(x)+ax+b \cdots\cdots$ ㉠

나머지정리에 의해

$p(2007)=2007,\ p(2008)=2008$이므로

㉠의 x에 2007와 2008을 대입하면

$2007a+b=2007,\ 2008a+b=2008$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

그러므로 구하는 나머지는 x

16. x^5+x+1을 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$x^5+x+1=(x+1)Q(x)+R$

$x=-1$을 양변에 대입하면 $R=-1$

$\therefore\ x^5+x+1=(x+1)Q(x)-1\cdots$㉠

$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $Q(1)$

㉠에 $x=1$을 대입하면 $3=2Q(1)-1$

$\therefore\ Q(1)=2$

17. 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b(a \neq 0)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $xf(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지를 구하면?

① R ② aR ③ bR ④ $-\frac{b}{a}R$ ⑤ $\frac{R}{a}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R \quad \therefore\ R=f(-\frac{b}{a})$

$g(x)=xf(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지는

$g(-\frac{b}{a})=-\frac{b}{a}f(-\frac{b}{a})=-\frac{b}{a}R$

18. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & a & -1 & b \\ & & c & d & a \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{5} \end{array}$$

① $a=3$　② $b=2$　③ $c=1$　④ $d=4$　⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & -1 & b \\ & & 1 & a+1 & a \\ \hline & 1 & a+1 & a & \boxed{b+a} \end{array}$$

$k=1,\ a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=4$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

19. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=-\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=3i$

㉢ $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}}=-2i$

㉤ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{5}=-\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2}+(\sqrt{-3})^2=6$

① ㉠,㉡　② ㉢,㉣　③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥　⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=-\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}=-3i$

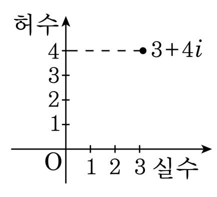
㉢ $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i=2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}}=\dfrac{4}{2i}=-2i$

㉤ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{2}i\times\sqrt{5}=\sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2}+(\sqrt{-3})^2=\sqrt{9}+(\sqrt{3}i)^2=0$

20. 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)를 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내어 좌표평면 위에 표시할 수 있다. 예를 들어 $3+4i$를 $(3,\ 4)$로 나타내면 다음 그림과 같이 표시할 수 있다. $z = 1 + i$일 때, 0, z, z^2 이 나타내는 점을 각각 A, B, C 라 할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인가? (단, 가장 정확하게 표시한 것을 하나만 고른다.)



① 정삼각형

② 이등변삼각형

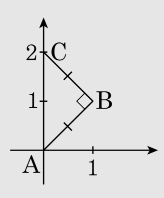
③ 직각삼각형

④ 직각이등변삼각형

⑤ 답 없음

해설

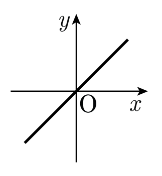
$z = 1 + i \quad z^2 = 2i \Rightarrow \quad B(1,\ 1),\ C(0,\ 2)$

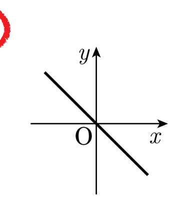


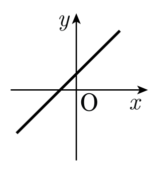
$\Rightarrow$ 직각이등변삼각형

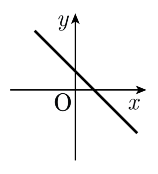
※ 이와 같이 복소수의 실수부와 허수부를 순서쌍으로 좌표평면에 나타내는 것을 복소평면이라 한다.

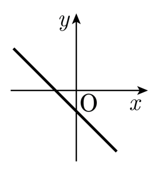
21. $(3+2i)z$가 실수가 되도록 하는 복소수 $z = x + yi$를 점 $(x,\ y)$로 나타낼 때, 점 $(x,\ y)$는 어떤 도형 위를 움직이는가? (단, x, y는 실수)

①


②


③


④


⑤


해설

$(3+2i)(x+yi) = 3x+3yi+2xi-2y$

$= (3x-2y)+(2x+3y)i$

주어진 식이 실수가 되려면 허수부가 0이어야 하므로 $2x+3y=0$

$\therefore\ y = -\frac{2}{3}x$

따라서 기울기가 음수이고 y절편이 0인 그래프는 ②이다.

22. 복소수 $a^2(1+i)+a(3+2i)+2$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

(준식) $=\left(a^2+3a+2\right)+\left(a^2+2a\right)i \Rightarrow$ 순허수
즉, $a^2+3a+2=0$
$a^2+2a \neq 0$이므로 $\therefore\ a=-1$

23. 등식 $(x^2 - 3x + 1) + (y^2 - 1)i = -1 + 3i$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 xy의 최댓값은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

실수부와 허수부로 나누어 생각한다.

$\therefore\ x^2 - 3x + 1 = -1 \quad y^2 - 1 = 3$

$x = 1$ 또는 $2y = \pm 2$

$\therefore\ (xy$의 최댓값$) = 4$

24. 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=2-i$ 가 성립할 때, $2x+y$ 의 값은?

① 8　② 7　③ 5　④ 4　⑤ 2

해설

$$\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=\frac{x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}$$

$\therefore \frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}=2-i$이므로,

복소수의 상등에서 $x+y=4,\ -x+y=-2$

이것을 풀면 $x=3,\ y=1$

따라서, $2x+y=2\times3+1=7$

25. 다음 계산을 하시오.

$$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{2006}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-i$

해설

$i^4=1$이므로

$\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^2+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^4$

$=\left(\frac{1}{i}\right)^5+\left(\frac{1}{i}\right)^6+\left(\frac{1}{i}\right)^7+\left(\frac{1}{i}\right)^8\cdots$

$=\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^2+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^4$

$=-i-1+i+1=0$

$\therefore$ (준식) $=1+(0+0+\cdots+0)+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^2$

$=1-i-1=-i$