1. 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

보기

ㄱ $a > b,\ c > d$ 이면 $a + c > b + d$ 이다.

ㄴ $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다.

ㄷ $a > b > 0$ 이면 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ 이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

ㄱ $a - b > 0,\ c - d > 0$ 에서 양변을 더해 정리하면 주어진 식이 나온다.

ㄴ $a > 0 > b$ 인 경우 b의 절댓값이 a 보다 크면 주어진 식은 성립하지 않는다.

ㄷ 주어진 식에서 a, b의 부호가 모두 양수이므로 그 역수는 반대가 된다.

2. $-1 < x < 3$일 때, $A = 2x - 3$의 범위는?

① $1 < A < 3$　② $-1 < A < 3$　③ $-3 < A < 5$
④ $-5 < A < 3$　⑤ $3 < A < 5$

해설

$-1 < x < 3$에서 양변에 2를 곱하고 3을 빼면
$-2 - 3 < 2x - 3 < 6 - 3$
$\therefore\ -5 < 2x - 3 < 3$

3. 두 부등식 $10-3x>4$, $2x+1>-3$ 을 동시에 만족하는 해가 $a<x<b$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$i)10-3x>4$
$\Rightarrow x<2$
$ii)$ $2x+1>-3$
$\Rightarrow x>-2$
부등식의 해의 범위가 $-2<x<2$ 이므로,
$a+b=(-2)+2=0$ 이다.

4. 다음 연립부등식의 해가 $a < x < b$ 일 때, $b - a$ 값은?

$$\begin{cases} 3(4x-3) > 2(x+3) \\ 5(x+9) - 5 > 15(x-4) \end{cases}$$

① 2 ② 7 ③ 13 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

해설

ⅰ) $3(4x-3) > 2(x+3)$

$\Rightarrow\ 12x - 9 > 2x + 6$

$\Rightarrow\ x > \frac{3}{2}$

ⅱ) $5(x+9) - 5 > 15(x-4)$

$\Rightarrow\ x + 9 - 1 > 3x - 12$

$\Rightarrow\ x < 10$

$\therefore\ \frac{3}{2} < x < 10$

$a = \frac{3}{2},\ b = 10$ 이므로 $b - a = 10 - \frac{3}{2} = \frac{17}{2}$

5. 연립부등식 $\begin{cases} 0.3x - 0.5 \le 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases}$ 를 만족하는 정수 x 는 모두 몇 개인가?

① 9 개 ② 8 개 ③ 7 개 ④ 6 개 ⑤ 5 개

해설

$\begin{cases} 0.3x - 0.5 \le 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 5 \le 4 \\ x - 3 > -18 - 2x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x > -5 \end{cases}$

$\therefore\ -5 < x \le 3$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 0.2x+1 \ge 0.7x \\ \frac{x}{2}-1 > \frac{x}{6}+\frac{1}{3} \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 없다.

해설

(i) $0.2x+1 \ge 0.7x$, $x \le 2$

(ii) $\frac{x}{2}-1 > \frac{x}{6}+\frac{1}{3}$, $3x-6 > x+2$

$\therefore\ x > 4$

따라서 연립부등식을 만족시키는 정수는 없다.

7. 연립부등식 $x < -\frac{3x-a}{4} < \frac{1}{2}$ 의 해가 $-\frac{1}{3} < x < b$ 일 때, $14ab$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(ⅰ) $x < -\frac{3x-a}{4}$, $-4x > 3x - a$

$\therefore\ x < \frac{a}{7}$

(ⅱ) $-\frac{3x-a}{4} < \frac{1}{2}$, $3x > a-2$, $x > \frac{a-2}{3}$

$\therefore\ \frac{a-2}{3} < x < \frac{a}{7}$

$\frac{a-2}{3} = -\frac{1}{3}$ 이므로 $a = 1$, $b = \frac{1}{7}$

$\therefore\ 14ab = 14 \times 1 \times \frac{1}{7} = 2$

8. 연립부등식 $\begin{cases} 10-2x \geq 3x \\ x-a > -3 \end{cases}$ 이 해를 갖지 않도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a > 2$ ② $a \leq 2$ ③ $a \geq 5$
④ $a \leq 5$ ⑤ $2 < a < 5$

해설

$\begin{cases} 10-2x \geq 3x & \rightarrow\ 2 \geq x \\ x-a > -3 & \rightarrow\ x > a-3 \end{cases}$

$a-3 \geq 2$

$\therefore\ a \geq 5$

9. 서로소인 두 자연수 a, b 에 대하여 $20 < a < 30$ 이고, $1 - \frac{1}{a}$ 을 소수로 나타내면 무한소수이다. $6a < 100b < 7a$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$6a < 100b < 7a$ 이면 $0.06a < b < 0.07a \cdots$ ㉠
$20 < a < 30$ 이므로 $0.06 \times 20 < b < 0.07 \times 30$
$1.2 < b < 2.1$ 이므로 $b = 2$
㉠ 에서 $0.06a < 2 < 0.07a$
$0.06a < 2$ 는 $a < 33.\times\times\times$
$2 < 0.07a$ 는 $a > 28.\times\times\times$
$\therefore\ 28.\times\times\times < a < 33.\times\times\times$
$1 - \frac{1}{a}$ 을 소수로 나타냈을때 무한소수이려면 $\frac{1}{a}$ 이 무한소수이어야 하고 a 는 2 와 5 이외의 소인수를 가져야한다.
따라서 $a = 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33$ 이고 $20 < a < 30$ 이므로 a 의 값은 $a = 29$ 이다.
$\therefore\ a + b = 29 + 2 = 31$

10. 200 원짜리 자두와 500 원짜리 복숭아를 합하여 9 개를 사는데, 그 값이 2800 원 이상 3600 원 이하가 되게 하려고 한다. 복숭아는 최대 몇 개까지 살 수 있는가?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

자두의 개수 : $(9-x)$ 개 , 복숭아의 개수 : x 개

$2800 \le 200(9-x)+500x \le 3600$

$$\begin{cases} 2800 \le 200(9-x)+500x \\ 200(9-x)+500x \le 3600 \end{cases}$$

$\therefore \frac{10}{3} \le x \le 6$

따라서 살 수 있는 복숭아의 최대 개수는 6 개이다.

11. 110 개의 노트를 학생들에게 8 권씩 나누어주면 노트가 남고, 9 권씩 나누어주면 노트가 부족하다. 이 때 학생의 수는 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 13 명

해설

문제에서 구하고자 하는 학생의 수를 x 명이라고 놓자.
모든 학생이 노트를 8 권씩 가지고 있을 때 전체 노트 수는 $8x$ 권이고, 모든 학생이 9 권씩 가지고 있을 때 전체 노트 수는 $9x$ 권이다. 그러나 노트 수는 모든 학생이 8 권씩 가질 때보다 많고, 모든 학생이 9 권씩 가질 때보다 적으므로, 이를 식으로 나타내면 $8x < 110 < 9x$ 이다.

이를 연립부등식으로 표현하면 $\begin{cases} 8x < 110 \\ 9x > 110 \end{cases}$

간단히 하면, $\begin{cases} x < \dfrac{110}{8} \\ x > \dfrac{110}{9} \end{cases}$ 이다.

이를 다시 나타내면 $\dfrac{110}{9} < x < \dfrac{110}{8}$ 이다.

$\dfrac{110}{8} = 13.75$ 이고 $\dfrac{110}{9} = 12.2\cdots$ 이므로 학생의 수는 13 명이 가능하다.

12. 야구경기에서 야구선수의 타율을 (안타수÷ 타석수) 로 정한다고 하자. 두 타자 A 와 B 는 오늘 현재 각각 30 타석과 25 타석을 기록중이고 A 선수가 친 안타수는 B 선수가 친 안타수보다 2 개 많고 현재 A 는 B 보다 타율이 높다. 만약 다음 경기에서 A 가 세 타석 연속 안타를 치지 못하고 B 선수는 경기가 없다면 A 와 B 의 타율 순위가 바뀐다고 할 때, A 선수가 현재 기록 중인 안타의 수는 최소 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 9 개

해설

오늘 현재 A 선수가 기록중인 안타의 수를 x 개라 하면 B 선수의 안타수는 $(x-2)$ 개 이다.

A 선수의 현재 타율은 $\frac{x}{30}$, B 선수의 현재 타율은 $\frac{x-2}{25}$ 이므로

$\frac{x}{30} > \frac{x-2}{25} \quad \therefore x < 12 \cdots ①$

다음경기에서 A 가 세 타석 연속 안타를 치지 못하고 B 선수는 경기가 없다면 B 의 타율은 변함이 없으므로

$\frac{x}{33} < \frac{x-2}{25} \quad \therefore x > 8.25 \cdots ②$

①, ② 의 공통 범위를 구하면

$8.25 < x < 12$

따라서 A 선수가 기록 중인 안타는 최소 9 개이다.

13. x보다 작거나 같은 정수 중에서 최대의 정수를 $[x]$, x보다 크거나 같은 정수 중에서 최소의 정수를 (x)로 나타낼 때, 방정식 $[x]+(x)=7$을 만족하는 x의 값을 모두 구하면?

① $\frac{7}{2}$　② $3 \le x \le 4$　③ $3 \le x < 4$
④ $3 < x \le 4$　⑤ $3 < x < 4$

해설

$$[x] = \begin{cases} k \ (x\text{가 정수 } k\text{일 때}) \\ k \ (k < x < k+1\text{일 때}) \end{cases}$$

$$(x) = \begin{cases} k \quad (x\text{가 정수 } k\text{일 때}) \\ k+1 \ (k < x < k+1\text{일 때}) \end{cases}$$

따라서, $[x]+(x)=7$ 이고
$[x]$, (x) 는 정수이므로
$[x]=3,\ (x)=4\ (\because\ [x] \le (x))$
$\therefore\ 3 < x < 4$

14. 부등식 $x^2-4|x|-5<0$을 풀면?

① $-5<x<5$ ② $-5<x<0$ ③ $-5<x<1$
④ $-1<x<5$ ⑤ $-1<x<6$

해설

(ⅰ) $x \geq 0$일 때, $|x|=x$이므로
$x^2-4x-5<0$, $(x-5)(x+1)<0$
$-1<x<5$
이 때 $x \geq 0$과의 공통범위는 $0 \leq x<5$
(ⅱ) $x<0$일 때
$x^2+4x-5<0$, $(x+5)(x-1)<0$
$-5<x<1$
이 때 $x<0$과 공통 범위는 $-5<x<0$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $-5<x<5$

15. 함수 $f(x) = (x^2 + 2ax + 3)^2 + (x^2 + 2ax + 3) - 6$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-1 \leq a \leq 1$　　② $-1 < a \leq 0$　　③ $-1 < a < 0$
④ $0 \leq a < 1$　　⑤ $0 < a \leq 1$

해설

$x^2 + 2ax + 3 = t$로 놓으면
$t^2 + t - 6 \geq 0,\ (t+3)(t-2) \geq 0$
$\therefore\ t \leq -3$ 또는 $t \geq 2$
(i) $t \leq -3$, 즉 $g(x) \leq -3$ 일 때
$x^2 + 2ax + 3 \leq -3$ 에서 $x^2 + 2ax + 6 \leq 0$
$y = x^2 + 2ax + 6$ 의 그래프는
아래로 볼록한 포물선이므로
모든 실수 x 에 대하여 성립하지 않는다.
(ii) $t \geq 2$, 즉 $g(x) \geq 2$ 일 때
$x^2 + 2ax + 3 \geq 2$ 에서 $x^2 + 2ax + 1 \geq 0$
이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식
$x^2 + 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = a^2 - 1 \leq 0 \quad \therefore\ -1 \leq a \leq 1$
(i), (ii) 에서 $-1 \leq a \leq 1$

16. 부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha-1<x<\beta+1$일 때, 부등식 $cx^2-bx+a>0$의 해를 α, β를 써서 나타내면? (단, $\alpha>1$)

① $\frac{1}{\beta+1}<x<\frac{1}{\alpha-1}$ ② $-\frac{1}{\beta+1}<x<-\frac{1}{\alpha-1}$
③ $\frac{1}{\alpha-1}<x<\frac{1}{\beta+1}$ ④ $-\frac{1}{\alpha-1}<x<-\frac{1}{\beta+1}$
⑤ $-\frac{1}{\alpha-1}<x<\frac{1}{\beta+1}$

해설

㉠ $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha-1<x<\beta+1$이라면 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0(a<0)$ 에서 두 근은 $\alpha-1,\beta+1$ 이다.

두 근의 합 : $\alpha-1+\beta+1=-\frac{b}{a}$, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

두 근의 곱 : $(\alpha-1)(\beta+1)=\frac{c}{a}$, $\alpha-1<\beta+1$이고, $\alpha>1$ 이므로 $\frac{c}{a}>0$

㉡ $cx^2-bx+a>0$에서 $\frac{c}{a}x^2-\frac{b}{a}x+1<0$, $(\alpha-1)(\beta+1)x^2+(\alpha+\beta)x+1<0$

$\{(\alpha-1)x+1\}\{(\beta+1)x+1\}<0$

$\alpha-1<\beta+1$이므로 $-(\alpha-1)>-(\beta+1)$, $-\frac{1}{\alpha-1}<-\frac{1}{\beta+1}$

$\therefore -\frac{1}{\alpha-1}<x<-\frac{1}{\beta+1}$

17. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=4$이다. 방정식 $f(4x-2)=0$의 두 근의 합은?

① 2 ② -2 ③ 4 ④ -4 ⑤ 0

해설

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$ 또는 $x=\beta$가 성립하면

$f(4x-2)=0 \Leftrightarrow 4x-2=\alpha$ 또는 $4x-2=\beta$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\alpha+2}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+2}{4}$

즉 $f(4x-2)=0$의 두 근은 $\dfrac{\alpha+2}{4}$, $\dfrac{\beta+2}{4}$이다.

$\therefore \dfrac{\alpha+2}{4}+\dfrac{\beta+2}{4}=\dfrac{\alpha+\beta+4}{4}=\dfrac{8}{4}=2$

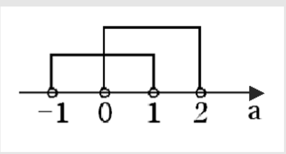
18. $x^2-2ax+1=0$, $x^2-2ax+2a=0$중에서 한 개의 방정식만 허근을 갖도록 양수 a의 범위를 정할 때, $\alpha \le a < \beta$이다. 이때 $\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\dfrac{D_1}{4}=a^2-1<0$에서 $-1<a<1$

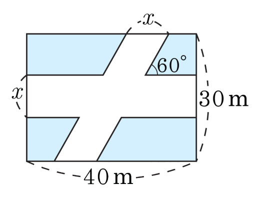
$\dfrac{D_2}{4}=a^2-2a<0$에서 $0<a<2$



그림에서 $a>0$이므로 $1 \le a < 2$

$\therefore\ \alpha=1,\ \beta=2$

19. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 $40\,\mathrm{m}$, $30\,\mathrm{m}$ 인 직사각형꼴의 땅에 같은 폭의 두 도로를 $60°$로 교차하도록 만들었다. 이 때, 남은 땅의 넓이가 $600\,\mathrm{m}^2$ 이상이 되도록 할 때, 도로 폭의 최대 길이는?



① 4m ② 6m ③ 8m ④ 10m ⑤ 12m

해설

남은 땅의 넓이를 S 라 하면

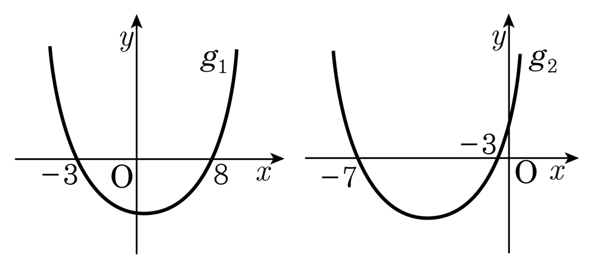
$S = 40 \times 30 - (40x + 30x - x^2) \geq 600$

$\therefore\ x^2 - 70x + 600 \geq 0$

$(x - 10)(x - 60) \geq 0$ 에서 $x \leq 10$ 또는 $x \geq 60$ $(0 < x < 30)$ 이 된다.

그러므로 도로폭의 최대 길이는 $0 < x \leq 10$ 이므로 $10\,\mathrm{m}$ 이다.

20. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
$x^2 + 10x - 24 < 0$, $(x + 12)(x - 2) < 0$
$\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

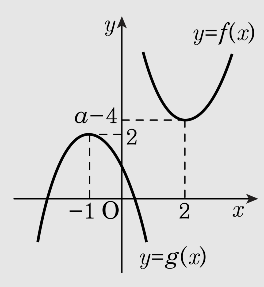
21. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + a$ 와 $g(x) = -x^2 - 2x + 1$ 이 있다. 임의의 실수 x_1 , x_2 에 대하여 $f(x_1) > g(x_2)$ 일 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > 6$ ② $a > 5$ ③ $a > 4$ ④ $a > 3$ ⑤ $a > 2$

해설

$f(x) = x^2 - 4x + a = (x-2)^2 + a - 4$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $a-4$,
$g(x) = -x^2 - 2x + 1$
$= -(x+1)^2 + 2$ 에서
$g(x)$ 의 최댓값은 2
한편, 모든 실수 x_1 , x_2 에 대하여
$f(x_1) > g(x_2)$ 이면 오른쪽 그림과 같이
$f(x)$ 의 최솟값이 $g(x)$ 의 최댓값보다
커야 하므로
$a - 4 > 2$ $\therefore$ $a > 6$



22. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 4x < 5 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-1 < x < 2$

해설

부등식 $x^2 - 4 < 0$에서 $(x+2)(x-2) < 0$
$\therefore -2 < x < 2 \cdots\cdots$ ㉠
$x^2 - 4x < 5$에서 $x^2 - 4x - 5 < 0$
$(x+1)(x-5) < 0$
$\therefore -1 < x < 5 \cdots\cdots$ ㉡
따라서 구하는 해는 ㉠과 ㉡를
동시에 만족하는 x의 값이므로
$\therefore -1 < x < 2$

23. 두 부등식 $x^2-2x-8>0$,
$x^2-(2a+1)x+a^2+a<0$에 대하여 공통범위가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 범위를 $b \le a \le c$라 할 때, $b+c$의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(x-4)(x+2)>0$,
$\therefore\ x>4,\ x<-2$
$x^2-(2a+1)x+a(a+1)<0$
$(x-a)(x-a-1)<0$
두 부등식의 공통범위가 없으려면
$a \ge -2,\ a+1 \le 4 \to a \le 3$
$\therefore\ -2 \le a \le 3$
$\therefore\ b=-2,\ c=3$
$\therefore\ b+c=1$

24. x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+6-a=0$의 모든 실근이 모두 1보다 클 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $3 < a \le 7$
② $-3 \le a < 7$
③ $-7 < a \le -3$
④ $a \le 3$ 또는 $a > 7$
⑤ $a < -7$ 또는 $a \ge -3$

해설

이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 6 - a$의 그래프를 생각하면

$\frac{D}{4} = a^2 - 6 + a \ge 0, \quad (a+3)(a-2) \ge 0$

$\therefore \ a \le -3, \ a \ge 2 \cdots$ ㉠

$f(1) = 1 + 2a + 6 - a > 0$

$\therefore \ a > -7 \cdots\cdots$ ㉡

대칭축 $x = -a$ 에서 $-a > 1$

$\therefore \ a < -1 \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통범위는 $-7 < a \le -3$

25. 이차방정식 $x^2-(a+1)x-3=0$의 한 근이 3보다 크고, 다른 한 근은 3보다 작을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a>-3$　② $a>-1$　③ $a>1$
④ $a<1$　⑤ $a<3$

해설
$f(x)=x^2-(a+1)x-3$이라 하면
방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 3이 있으므로
$f(3)=9-3(a+1)-3<0$
$-3a+3<0$
$\therefore\ a>1$