1. 1부터 72까지의 자연수 중에서 72와 서로소인 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 24 개

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$

72와 서로소는 2의 배수도 아니고, 3의 배수도 아닌 것

$\therefore \ 72 - (36 + 24 - 12) = 24$

$\therefore$ 24개

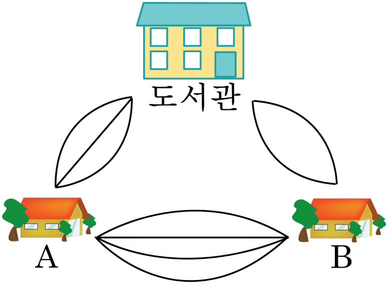
2. 10명의 학생이 O, X 문제에 임의로 답하는 경우의 수는?

① 128 ② 256 ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

해설

각 학생이 대답할 수 있는 가지 수가
2가지씩이므로 $\Rightarrow 2^{10} = 1024$

3. A 군의 집과 B 양의 집에서 도서관으로 직접 가는 길은 각각 3 가지, 2 가지가 있고, A 군의 집에서 도서관을 거치지 않고 B 양의 집으로 가는 길은 4 가지가 있다. A 군의 집을 출발하여 B 양의 집과 도서관을 각각 한 번씩만 들린 후 다시 A 군의 집으로 되돌아오는 방법의 수는?



① 18 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 60

해설

(i) A 군의 집에서 도서관을 거쳐 B 양의 집으로 간 다음도서관을 거치지 않고 A 군의 집으로 되돌아오는방법의 수는 $3 \times 2 \times 4 = 24$ (가지)

(ii) A 군의 집에서 도서관을 거치지 않고 B 양의 집으로 간 다음 도서관을 거쳐 A 군의 집으로 되돌아오는방법의 수는 $4 \times 2 \times 3 = 24$ (가지)

따라서, 구하는 방법의 수는 $24 + 24 = 48$ (가지)

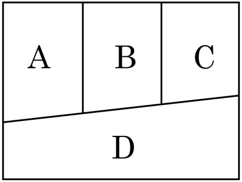
4. 5원 짜리 동전 4개, 10원 짜리 동전 2개, 100원 짜리 동전 1개를 사용하여 거스름돈 없이 지불할 수 있는 지불금액의 수는 몇 가지인가?

① 10 ② 13 ③ 17 ④ 22 ⑤ 26

해설

5원 짜리 동전 4개이면 10원 짜리 동전 2개와 같으므로 금액이 중복된다.
10원 짜리 동전 2개를 5원 짜리 동전 4개로 바꾸면 5원 짜리 동전 8개, 100원 짜리 동전 1개가 되고 지불 방법의 수는
$(8+1)\times(1+1)=18$(가지)
돈이 0원이면 지불하는 것이 아니므로
$18-1=17$(가지)

5. 다음 그림의 네 부분에 4 가지 색을 사용하여 색칠을 하려고 한다. 한 가지 색을 여러 번 쓸 수 있고, 인접한 부분은 서로 다른 색이 칠해져야 한다면 칠하는 방법은 몇 가지인가?



① 24 ② 48 ③ 72 ④ 96 ⑤ 108

해설

가장 영역이 넓은 D 영역부터 칠한다면,

$4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$

$\therefore$ 48 가지

6. 다음은 서로 다른 n개에서 서로 다른 r개를 꺼내어 일렬로 배열하는 방법의 수를 구하는 과정이다.

> (i) n개에서 특정한 1개를 뺀 나머지에서 r개를 꺼내어 배열한다.
> (ii) n개에서 특정한 1개를 포함하여 r개를 꺼내어 배열한다.
> (i), (ii)는 배반이므로,
> $\therefore {}_nP_r = \boxed{(가)} + \boxed{(나)}$

위의 과정에서 $\boxed{(가)}$, $\boxed{(나)}$에 들어갈 알맞은 식은?

① (가): ${}_{n-1}P_r$, (나): ${}_{n-1}P_{r-1}$

② (가): ${}_{n-1}P_r$, (나): ${}_nP_{r-1}$

③ (가): ${}_nP_r$, (나): ${}_{n-1}P_{r-1}$

④ (가): ${}_{n-1}P_r \times r$, (나): ${}_{n-1}P_{r-1}$

⑤ (가): ${}_{n-1}P_r$, (나): ${}_{n-1}P_{r-1} \times r$

해설

(i)에서 ${}_{n-1}P_r$←(가)

(ii) 에서 특정한 1개를 포함시켜 r개를 꺼내려면
$n-1$개에서 $r-1$개를 꺼내어 배열한 다음
(${}_{n-1}P_{r-1}$), 특정한 1개를 다시 이것들과 배열시키는 것을 생각한다.

따라서 ${}_{n-1}P_{r-1} \times r$←(나)

7. 남자 5명, 여자 4명 중에서 남자 3명, 여자 2명을 뽑아서 일렬로 세우는 방법은 몇 가지인가?

① 1800 ② 3600 ③ 4800 ④ 5400 ⑤ 7200

해설

$_5C_3 \times_4 C_2 \times 5! = 7200$

8. 남학생 4 명과 여학생 2 명을 일렬로 세울 때, 여학생끼리 이웃하여 서는 방법은 몇 가지인가?

① 60 가지 ② 120 가지 ③ 180 가지

④ 240 가지 ⑤ 300 가지

해설

4 명의 남학생과 2 명의 여학생 중에서 여학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 5 명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!$ 이고, 묶음 안에서 여학생 2 명이 자리를 바꾸는 방법의 수가 2 가지이므로, 구하는 경우의 수는, $5! \times 2 = 240$ (가지) 이다.

9. 남자 4명, 여자 3명을 일렬로 세울 때, 여자끼리는 이웃하지 않도록 서는 경우의 수는?

① 720 ② 960 ③ 1280 ④ 1440 ⑤ 1560

해설

먼저 남자 4명을 줄 세운 다음 양 끝과 남자 사이의 5자리 중 3 자리를 골라 여자들을 배치한다.

$4! \times {}_5P_3 = 1440$

10. 나란히 놓인 10개의 의자에 A, B, C, D 의 4명이 앉을 때, 어느 두 사람도 인접하지 않는 경우의 수는?

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

해설

10 개의 의자에 네 사람이 앉으므로 빈 의자는 6 개이다. 이 6 개의 의자 사이 및 양 끝의 7 자리에 의자에 앉은 네 사람을 배열하면 되므로 구하는 경우의 수는 $\Rightarrow {}_7P_4 = 840$

11. IMPORT의 6개의 문자를 일렬로 배열할 때, I와 T가 양 끝에 오는 경우의 수는?

① 36 ② 42 ③ 48 ④ 54 ⑤ 60

해설

I와 T를 양 끝에 오게 하는 경우의 수 : 2
나머지 문자를 배열하는 경우의 수 : 4!
$4! \times 2 = 48$

12. a, b, c, d, e의 5개의 문자를 일렬로 나열할 때, c가 d보다 앞에 오게 되는 방법의 수는?

① 24 ② 30 ③ 60 ④ 72 ⑤ 120

해설

c와 d를 같은 문자로 생각하여 5개의 문자를 나열하는 방법과 같다.

$\therefore \dfrac{5!}{2!} = 60$

13. 0, 0, 1, 2, 3, 4를 써 놓은 6장의 카드 중에서 3장을 뽑아 나열하여 세 자리 정수를 만들 때, 짝수의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 34 개

해설

1의 자리에 0, 2, 4가 오면 짝수이므로

$\times\times 0$ 의 꼴 $\rightarrow 4\times4$, $\times\times 2$ 의 꼴 $\rightarrow 3\times3$, $\times\times 4$ 의 꼴 $\rightarrow 3\times3$

따라서 짝수의 개수는 $4\times4+3\times3+3\times3=34$ (개)

14. 여섯 개의 수 3, 4, 5, 6, 7, 8 에서 서로 다른 두 수 p, q 를 택하여 이차방정식 $px^2 + qx = 0$ 을 만들 때, 만들 수 있는 집합 $A = \{x|px^2 + qx = 0\}$ 의 개수는?

① 22 ② 23 ③ 24 ④ 25 ⑤ 26

해설

6 개의 수 중에서 2 개를 택하여 p, q 에 나열하는 경우의 수를 생각한다.

${}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$ 개.

이 중에서 $p = 3, q = 6$ 인 경우와 $p = 4, q = 8$ 인 경우의 해는 같아진다.

따라서 이와 같은 경우를 찾으면,

$p = 6, q = 3$과 $p = 8, q = 4$

$p = 3, q = 4$과 $p = 6, q = 8$

$p = 4, q = 3$과 $p = 8, q = 6$

이므로 구하고자 하는 경우의 수는

$30 - 4 = 26$(개) 이다.

15. 자동차 판매 사원 10 명을 강원도, 경기도, 경상도, 전라도, 충청도의 각 도에 2 명씩 일정하게 배치하는 방법은 몇 가지인가?

① 113400 가지 ② 21230 가지 ③ 476290 가지

④ 798090 가지 ⑤ 983020 가지

해설

사람을 모두 다르게 간주 하면, 5^{10}
2 명씩 배치하는 경우는
${}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 = 113400$ (가지)

해설

강원도를 a , 경기도를 b , 경상도를 c ,
전라도를 d , 충청도를 e 라고 했을 때,
$aabbccddee$ 를 나열하는 방법의 수이므로,

$$\therefore \frac{10!}{(2!)^5} = 113400 \text{ (가지)}$$

16. 2000 의 양의 약수 중 제곱수가 아니면서 짝수인 것의 개수는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$2000 = 2^4 \cdot 5^3$ 의 양의 약수는
$2^j \cdot 5^k (0 \le j \le 4, 0 \le k \le 3)$ 의 형태이다.
그러므로 제곱수가 아니면서 짝수인 것은
$2 \cdot 5^k (k = 0, 1, 2, 3)$
$2^2 \cdot 5^k \ (k = 1,\ 3)$
$2^3 \cdot 5^k \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$
$2^4 \cdot 5^k (k = 1, 3)$ 의 형태이므로
구하는 개수는 $4 + 2 + 4 + 2 = 12$ (개)

17. A, B, C, D 네 사람이 각자 모자 a, b, c, d 를 하나씩 가져갔을 때, 모두 다른 사람의 모자를 가져갔을 경우의 수는?

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 9 가지

해설

A B C D

b — a — d — c
b — c — d — a
b — d — a — c

c — a — d — b
c — d — a — b
c — d — b — a

d — a — b — c
d — c — a — b
d — c — b — a

18. p, o, w, e, r 의 5 개 문자를 일렬로 배열할 때, p, o, w 중 적어도 2 개가 이웃하는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 가지

▷ 정답 : 108 가지

해설

5 개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $5! = 120$
p, o, w 중 어느 것도 이웃하지 않는 경우의 수는
p, o, w 를 일렬로 배열하고 그 사이사이에 e, r 이 오도록 배열하는 경우의 수와 같으므로
$3! \times 2 = 6 \times 2 = 12$
따라서 구하는 경우의 수는 $120 - 12 = 108$

19. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. ${}_{3n}C_{n-1} = {}_{3n}C_{2n+1}$

ㄴ. ${}_{4n}P_{3}n = (3n)! \times {}_{4n}C_{n}$

ㄷ. ${}_{2n+1}C_{n+2} = {}_{2n}C_{n-1} + {}_{2n}C_{n-2}$ (단, $n \geq 2$)

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ , ㄷ

해설

㉠ ${}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r}$ 이므로

$${}_{3n}C_{n-1} = {}_{3n}C_{3n-(n-1)} = {}_{3n}C_{2n+1} \text{ (참)}$$

㉡ ${}_{n}C_{r} = \dfrac{{}_{n}P_{r}}{r!}$ 에서

$${}_{n}P_{r} = r! \times {}_{n}C_{r}$$

$$\begin{aligned} {}_{4n}P_{3n} &= (3n)! \times {}_{4n}C_{3n} \\ &= (3n)! \times {}_{4n}C_{4n-3n} \\ &= (3n)! \times {}_{4n}C_{n} \text{(참)} \end{aligned}$$

㉢ ${}_{n}C_{r} = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_{r}$ 이므로

$$\begin{aligned} {}_{2n+1}C_{n+2} &= {}_{2n}C_{n+1} + {}_{2n}C_{n+2} \\ &= {}_{2n}C_{2n-(n+1)} + {}_{2n}C_{2n-(n+2)} \\ &= {}_{2n}C_{n-1} + {}_{2n}C_{n-2} \text{(참)} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢ 이다.

20. 2002년 월드컵은 32개팀이 참가하여 4개팀 8조로 나누어 리그전을 치룬 후 16강을 결정했다. 16강은 토너먼트 방식으로 우승팀을 가렸고, 별도로 3, 4위전이 있었다. 2002년 월드컵에서 치른 총 게임 수를 구하여라.

① 44　② 58　③ 64　④ 72　⑤ 76

해설

각 조별 리그전 : $_4C_2 = 6$

16강 토너먼트 : $16 - 1 = 15$

3, 4위전 : 1

$\therefore\ _4C_2 \times 8 + (16 - 1) + 1 = 64$

21. 서로 다른 책이 11권 꽂혀 있는 책장에서 3권의 책을 꺼낼 때, 읽은 책이 적어도 한 권 포함되는 경우의 수가 130이라면 읽은 책은 몇 권인가?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

전체의 경우의 수에서 읽은 책이 하나도 포함되지 않는 경우를 빼준다. 읽은 책의 권수를 x 라 하면,

$${}_{11}C_3 - {}_{11-x}C_3 = 130$$

$${}_{11-x}C_3 = 35$$

$$11 - x = 7, x = 4$$

22. 8 명이 타고 있는 승강기가 2 층으로부터 11 층까지 10 개층에서 설 수 있다고 한다. 이 때, 각각 4 명, 2 명, 2 명씩 3 개층에서 모두 내리게 되는 방법의 수는?

① 75600 ② 84400 ③ 92400

④ 124500 ⑤ 151200

해설

8 명을 4 명, 2 명, 2 명씩 나누는 방법의

수는 ${}_8C_4 \times_4 \mathrm{C}_2 \times_2 \mathrm{C}_2 \times \frac{1}{2!}$ 이고,

이와 같이 3개층에 내리게 되는 방법의 수는

${}_{10}\mathrm{P}_3$ 이다.

따라서 ${}_8C_4 \times_4 C_2 \times_2 C_2 \times \frac{1}{2!} \times_{10} P_3 = 151200$

23. 십이각형의 서로 다른 대각선의 교점 중 세 선분이 교차하는 점이 없다고 할 때 대각선의 교점은 몇 개인지 구하여라. (단 꼭짓점은 제외한다.)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 495 개

해설

대각선의 교점은 두 대각선에 의해 결정되고 두 대각선은 4 개의 점에 의해 결정되므로 십이각형의 대각선의 교점의 최대 개수는

$_{12}C_4 = 495$

24. 10 개의 직선이 있다. 이 중 3 개는 서로 평행하다. 그리고 어느 3 개도 같은 점에서 만나지 않는다. 이들 직선으로 만들어지는 삼각형의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 98 개

해설

삼각형은 세 개의 직선으로 결정되므로 10 개의 직선에서 3 개의 직선을 뽑을 경우의 수는 ${}_{10}C_3$ 가지이다. 이 중에서 평행한 세 개의 직선을 뽑거나, 평행한 두 개의 직선과 나머지 7 개의 직선 중에서 한 개의 직선을 뽑는 경우는 삼각형이 만들어 질 수 없다. 이런 경우의 수는 ${}_3C_3 + {}_3C_2 \times {}_7C_1$ 가지이다.

따라서 삼각형의 개수는

${}_{10}C_3 - ({}_3C_3 + {}_3C_2 \times {}_7C_1) = 98$ (개)

25. 좌표평면 위의 6 개의 평행한 직선 $x=m$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ 와 5 개의 평행한 직선 $y=n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 로 만들어지는 직사각형 중에서 점 $A\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ 를 포함하지 않는직사각형의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 102 개

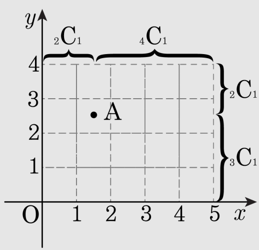
해설

6 개의 평행한 직선 $x=m$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ 와
5 개의 평행한 직선 $y=n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 로
만들어지는 직사각형의 총 개수는

$${}_6C_2 \times {}_5C_2 = \frac{6\times5}{2}\times\frac{5\times4}{2} = 150\ (\text{개})$$

이 중에서 점 $A\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ 를 포함하는 직사각형의

개수는 $({}_2C_1 \times {}_4C_1)\times({}_2C_1 \times {}_3C_1) = 8\times6 = 48$ (개)



따라서, 구하는 직사각형의 개수는 $150-48=102$ (개)