1. 실수 k에 대하여 복소수 $z = 3(k+2i) - k(1-i)^2$의 값이 순허수가 되도록 k의 값을 정하면?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 3(k+2i) - k(-2i)$

$= 3k + (6+2k)i \Rightarrow$ 순허수

$\therefore\ 3k = 0,\ k = 0$

2. 다음 등식을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x-y$의 값을 구하면?

$$(1+2i)x+(1+i)y=1+3i$$

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

$(x+y)+(2x+y)i=1+3i$
$x+y=1,\ 2x+y=3$
$x=2,\ y=-1$

3. $(4+3i)^2-(4-3i)^2$ 의 값은?

① 0 ② 24 ③ 48 ④ $24i$ ⑤ $48i$

해설

$(4+3i)^2-(4-3i)^2$
$=16+24i-9-(16-24i-9)$
$=48i$

4. $x = 1 + \sqrt{2}i, y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$x + y = 2,\ xy = 3$

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$

5. $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}$를 계산하면?

① $\sqrt{15}$　　② $-\sqrt{15}$　　③ $\sqrt{15}i$
④ $-\sqrt{15}i$　　⑤ -15

해설

$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}i=-\sqrt{15}$

6. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 2(k-i) - k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$z = 2(k-i) - k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$z = 2(k-i) - k(1+i)^2$
$= 2k - 2i - 2ki$
$= 2k - (2+2k)i$

허수 부분이 0이려면 $2 + 2k = 0$ 이어야 한다.

따라서 $k = -1$

7. 실수 $x,\ y$에 대하여 $(1+i)x+(i-1)y=2i$일 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$(1+i)x+(i-1)y=2i$

$(x-y)+(x+y)i=2i$

좌변과 우변이 같아야 하므로, $x-y=0,\ x+y=2$

두 식을 연립하여 풀어주면, $\therefore\ x=1,\ y=1$

$\therefore\ x+y=2$

8. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1 ② -1

③ $\sqrt{-1}$ ④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$\therefore\ j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$

9. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

㉠ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

㉡ $z + \bar{z}$는 실수이다.

㉢ $z - \bar{z}$는 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉣　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

㉠ $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ (실수)

㉡ $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$ (실수)

㉢ $z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$

$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$

$= (a+1+bi)(a+1-bi)$

$= (a+1)^2 + b^2$ (실수)

10. $z=1-i$ 일 때, $\frac{\overline{z}-1}{z}-\frac{z-1}{\overline{z}}$ 의 값은?

① $-i$ ② i ③ $-2i$ ④ $2i$ ⑤ 1

해설

$z=1-i, \overline{z}=1+i$

$\therefore$ (준식) $=\frac{i}{1-i}-\frac{-i}{1+i}=\frac{2i}{2}=i$

11. $(2-i)\bar{z}+4iz=-1+4i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 $z\bar{z}$의 값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$z=a+bi$라 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

$(2-i)(a-bi)+4i(a+bi)=-1+4i$

$(2a-5b)+(3a-2b)i=-1+4i$

$\therefore 2a-5b=-1 \cdots$ ㉠

$3a-2b=4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=1$

$\therefore\ z=2+i,\quad \bar{z}=2-i$

$\therefore\ z\bar{z}\ =\ (2+i)(2-i)=2^2-i^2=5$

12. $x = -2 - i$ 일 때, $x^2 + 4x + 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x = -2 - i$ 에서 $x + 2 = -i$ 의 양변을 제곱하면
$(x + 2)^2 = (-i)^2$ 이므로
$x^2 + 4x = -5$
$\therefore\ x^2 + 4x + 10 = -5 + 10 = 5$

13. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = 3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = 6$

① ㉠,㉡　　② ㉢,㉣　　③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥　　⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = -\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} = -3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = \dfrac{4}{2i} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2}i \times \sqrt{5} = \sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = \sqrt{9} + (\sqrt{3}i)^2 = 0$

14. 복소수 $a^2(1+i)+a(3+2i)+2$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

(준식) $=(a^2+3a+2)+(a^2+2a)\,i \Rightarrow$ 순허수
즉, $a^2+3a+2=0$
$a^2+2a\neq0$이므로 $\therefore\ a=-1$

15. $|x-y|+(y-2)i=5x-2-3xi$를 만족하는 실수를 $x,\ y$라 할 때, $\frac{x}{y}$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{3}{4}$

해설

(i) $x \geq y$일 때,

$(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$

$x-y=5x-2,\quad y-2=-3x$

$\therefore\ x=0,\ y=2$($x<y$이므로 부적합)

(ii) $x<y$일 때.

$-(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$

$-x+y=5x-2,\ y-2=-3x$

$\therefore\ x=\frac{4}{9},\ y=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$

16. $(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값을 α, β라 할 때, $\alpha-\beta$의 값을 구하면$(\alpha>\beta)$?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$
$(-x^2-3ax+5)+(x^2-3x+2)i=0$
$-x^2-3ax+5=0\cdots$ⓐ
$x^2-3x+2=0\cdots$ⓑ
ⓑ을 인수분해하면,
$(x-1)(x-2)=0$, $\therefore\ x=1,\ 2$
ⓐ에 대입하면,
$x=1$일 때, $-1-3a+5=0$, $\therefore\ a=\frac{4}{3}$
$x=2$일 때, $-4-6a+5=0$, $\therefore\ a=\frac{1}{6}$
$\therefore\ \alpha=\frac{4}{3}, \beta=\frac{1}{6}(\because\ \alpha>\beta)$
$\therefore\ \alpha-\beta=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

17. n이 홀수일 때, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n+1}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n+1}$을 간단히 하면?

① $-2i$ ② $-i$ ③ $2i$ ④ i ⑤ 0

해설

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{2i}{2}=i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{-2i}{2}=-i$

$i^{2n+1}+(-i)^{4n+1}$ ($n=2k-1$ 대입)

$i^{2(2k-1)+1}+(-i)^{4(2k-1)+1}$

$=i^{4k-1}-i$

$=-i-i=-2i$

18. 다음 보기 중 옳은 것의 개수는? (단, $i = \sqrt{-1}$)

ㄱ 16의 제곱근은 4이다.

ㄴ 실수를 제곱하면 양수 또는 0이다.

ㄷ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z + \bar{z}$ 는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

ㄹ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z\bar{z}$는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

ㅁ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z = \bar{z}$이면 z는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

ㄱ 제곱해서 16 이 되는 수 $4, -4$ ∴ 거짓
ㄴ 실수는 제곱하면 0보다 크거나 같다. ∴ 참
ㄷ $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $z + \bar{z} = 2a$ ∴ 참
ㄹ $z\bar{z} = a^2 + b^2$ ∴ 참
ㅁ $z = \bar{z}$, $a + bi = a - bi$, $2bi = 0$, $b = 0$ ∴ $z = a = \bar{z}$ ∴ 참

19. 임의의 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z=x+yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z}=x-yi$ 의 곱 $z\bar{z}=1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 을 간단히 하면?

① $-y$ ② $-x$ ③ x ④ y ⑤ 0

해설

$z\bar{z}=1$ 에서 $\frac{1}{z}=\bar{z}=x-yi$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)&=\frac{1}{2}\{(x+yi)+(x-yi)\}\\&=\frac{1}{2}\times 2x\\&=x\end{aligned}$$

20. 복소수 z 에 대하여 $3z+\bar{z}(1+i)=3-i$ 가 성립할 때, $z\bar{z}$ 의 값은?

① -3　② 0　③ $\frac{1}{2}$　④ 2　⑤ 4

해설

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$
이것을 주어진 식에 대입하면
$3(a+bi)+(a-bi)(1+i)=3-i$
$3a+3bi+a+ai-bi+b=3-i$
$(4a+b)+(a+2b)i=3-i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $4a+b=3$, $a+2b=-1$

$\begin{cases} 4a+b=3 & \cdots ㉠ \\ a+2b=-1 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 에서

㉠ $\times 2-$ ㉡ 을 하면 $7a=7$,
$\therefore\ a=1$
$a=1$ 을 ㉠에 대입하면 $b=-1$
따라서 $z=a+bi=1-i$ 이므로 $z\bar{z}=(1-i)(1+i)=2$

21. 두 복소수 α, β 에 대하여 $\alpha+\overline{\beta}=2008i$ 일 때, $\overline{\alpha}+\beta$ 의 값은? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① 2008　　② -2008

③ $2008i$　　④ $-2008i$

⑤ 일정하지 않다.

해설

켤레복소수의 성질에서

$\alpha+\overline{\beta}=2008i$ 일 때

$\overline{\alpha+\overline{\beta}}=\overline{2008i}$

$\overline{\alpha}+\beta=-2008i$

22. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 $2z+3\bar{z}=5-2i$를 만족하는 복소수 z의 역수는?

① $-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i$　② $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$　③ $-1-2i$
④ $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$　⑤ $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

해설

$z=a+bi,\ \bar{z}=a-bi$ ($a,\ b$ 는 실수)라 두면
$2z+3\bar{z}=5-2i$
$2(a+bi)+3(a-bi)=5-2i$
$5a-bi=5-2i$
복소수 상등에 의하여
$a=1,\ b=2$
$\therefore\ z=1+2i$
(z의 역수)$=\frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

23. $w = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $1 + w + w^2 + \cdots + w^{100}$ 의 값은?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$　② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$　③ 0

④ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$　⑤ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$w = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$$w^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$$

$$= \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$w^3 = w \cdot w^2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1-\sqrt{3}}{2} = \frac{1-3i^2}{4} = 1$$

$1 + w + w^2 = 1 + \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} + \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} = 0$ 이므로

$$\therefore 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + \cdots + w^{100}$$
$$= 1 + w + w^2 + w^3(1 + w + w^2) + \cdots$$
$$+ w^{96}(1 + w + w^2) + w^{99}(1 + w)$$
$$= 0 + 0 + \cdots + 0 + w^{99}(1 + w) = (w^3)^{33} \cdot (1 + w)$$
$$= 1 + w = 1 + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

24. 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{-2}-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$ 을 간단히 하여 $a+bi$ 의 꼴로 나타낼 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12\sqrt{2}$

해설

$\sqrt{-3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{-2}-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$

$=(\sqrt{-3}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{-2})-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$

$=\sqrt{-6}\times\sqrt{-6}-\sqrt{-2}-\sqrt{-2}$

$=-\sqrt{36}-\sqrt{2}i-\sqrt{2}i=-6-2\sqrt{2}i$

$\therefore\ ab=12\sqrt{2}$

25. 다음을 계산하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3 + 3i$

해설

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$
$$= \sqrt{3 \cdot (-3)} - \sqrt{(-3) \cdot (-3)} + \sqrt{\frac{-18}{2}} - \sqrt{\frac{18}{-2}}$$
$$= \sqrt{-9} - \sqrt{9} + \sqrt{-9} - \sqrt{-9}$$
$$= -\sqrt{9} + \sqrt{-9}$$
$$= -3 + 3i$$