1. 실수 k에 대하여 복소수 $z = 3(k+2i) - k(1-i)^2$의 값이 순허수가 되도록 k의 값을 정하면?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$z = 3(k+2i) - k(-2i)$$
$$= 3k + (6+2k)i \Rightarrow \text{순허수}$$
$$\therefore\ 3k = 0,\ k = 0$$

2. 다음 등식을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x-y$의 값을 구하면?

$$(1+2i)x+(1+i)y=1+3i$$

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설

$(x+y)+(2x+y)i=1+3i$

$x+y=1,\ 2x+y=3$

$x=2,\ y=-1$

3. $(4+3i)^2-(4-3i)^2$ 의 값은?

① 0 ② 24 ③ 48 ④ $24i$ ⑤ $48i$

해설

$(4+3i)^2-(4-3i)^2$

$=16+24i-9-(16-24i-9)$

$=48i$

4. $x = 1 + \sqrt{2}i, y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -2

해설

$x + y = 2,\ \ xy = 3$

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$

5. $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}$를 계산하면?

① $\sqrt{15}$　　② $-\sqrt{15}$　　③ $\sqrt{15}i$

④ $-\sqrt{15}i$　　⑤ -15

해설

$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5} = \sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}i = -\sqrt{15}$

6. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$$\begin{aligned} z &= 2(k-i)-k(1+i)^2 \\ &= 2k-2i-2ki \\ &= 2k-(2+2k)i \end{aligned}$$

허수 부분이 0이려면 $2+2k=0$ 이어야 한다.

따라서 $k=-1$

7. 실수 x, y에 대하여 $(1+i)x+(i-1)y=2i$일 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(1+i)x+(i-1)y=2i$

$(x-y)+(x+y)i=2i$

좌변과 우변이 같아야 하므로, $x-y=0,\ x+y=2$

두 식을 연립하여 풀어주면, $\therefore\ x=1,\ y=1$

$\therefore\ x+y=2$

8. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1

② -1

③ $\sqrt{-1}$

④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$\therefore\ j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$

9. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

㉠ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

㉡ $z + \bar{z}$는 실수이다.

㉢ $z - \bar{z}$는 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z = a + bi$ $(a,\ b$ 는 실수$)$로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

㉠ $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ (실수)

㉡ $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$ (실수)

㉢ $z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$

$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$

$$= (a+1+bi)(a+1-bi)$$

$$= (a+1)^2 + b^2 \text{ (실수)}$$

10. $z = 1 - i$ 일 때, $\dfrac{\bar{z} - 1}{z} - \dfrac{z - 1}{\bar{z}}$ 의 값은?

① $-i$　　② i　　③ $-2i$　　④ $2i$　　⑤ 1

해설

$z = 1 - i, \bar{z} = 1 + i$

$\therefore$ (준식) $= \dfrac{i}{1 - i} - \dfrac{-i}{1 + i} = \dfrac{2i}{2} = i$

11. $(2-i)\bar{z}+4iz=-1+4i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 $z\bar{z}$의 값은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$z=a+bi$라 놓으면 $\bar{z}=a-bi$

$(2-i)(a-bi)+4i(a+bi)=-1+4i$

$(2a-5b)+(3a-2b)i=-1+4i$

$\therefore 2a-5b=-1 \cdots$ ㉠

$3a-2b=4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=1$

$\therefore\ z=2+i,\quad \bar{z}=2-i$

$\therefore\ z\bar{z}\ =\ (2+i)(2-i)=2^2-i^2=5$

12. $x = -2 - i$ 일 때, $x^2 + 4x + 10$ 의 값을 구하시오.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

$x = -2 - i$ 에서 $x + 2 = -i$ 의 양변을 제곱하면
$(x+2)^2 = (-i)^2$ 이므로
$x^2 + 4x = -5$
$\therefore\ x^2 + 4x + 10 = -5 + 10 = 5$

13. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=-\sqrt{-6}$ ㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=3i$ ㉢ $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=2\sqrt{3}i$ ㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}}=-2i$ ㉤ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{5}=-\sqrt{10}$ ㉥ $\sqrt{(-3)^2}+(\sqrt{-3})^2=6$

① ㉠,㉡　② ㉢,㉣　③ ㉠,㉣,㉤

④ ㉣,㉥　⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=-\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}=-3i$

㉢ $\sqrt{-27}-\sqrt{-3}=3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i=2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}}=\dfrac{4}{2i}=-2i$

㉤ $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{2}i\times\sqrt{5}=\sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2}+(\sqrt{-3})^2=\sqrt{9}+(\sqrt{3}i)^2=0$

14. 복소수 $a^2(1+i)+a(3+2i)+2$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$(\text{준식})=\left(a^2+3a+2\right)+\left(a^2+2a\right)i \Rightarrow$ 순허수

즉, $a^2+3a+2=0$

$a^2+2a \neq 0$이므로 $\therefore\ a=-1$

15. $|x-y|+(y-2)i=5x-2-3xi$를 만족하는 실수를 x, y라 할 때, $\frac{x}{y}$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

(i) $x \geq y$일 때,

$$(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$$

$$x-y=5x-2,\quad y-2=-3x$$

$\therefore\ x=0,\ y=2$($x<y$이므로 부적합)

(ii) $x<y$일 때.

$$-(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$$

$$-x+y=5x-2,\ y-2=-3x$$

$$\therefore\ x=\frac{4}{9},\ y=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$$

16. $(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값을 α, β라 할 때, $\alpha-\beta$의 값을 구하면$(\alpha>\beta)$?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$

$(-x^2-3ax+5)+(x^2-3x+2)i=0$

$-x^2-3ax+5=0\cdots$ ⓐ

$x^2-3x+2=0\cdots$ ⓑ

ⓑ을 인수분해하면,

$(x-1)(x-2)=0$, $\therefore\ x=1,\ 2$

ⓐ에 대입하면,

$x=1$일 때, $-1-3a+5=0$, $\therefore\ a=\frac{4}{3}$

$x=2$일 때, $-4-6a+5=0$, $\therefore\ a=\frac{1}{6}$

$\therefore\ \alpha=\frac{4}{3}, \beta=\frac{1}{6}(\because\ \alpha>\beta)$

$\therefore\ \alpha-\beta=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

17. n이 홀수일 때, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n+1}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n+1}$을 간단히 하면?

① $-2i$　② $-i$　③ $2i$　④ i　⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{2i}{2}=i$$

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$i^{2n+1}+(-i)^{4n+1}$ ($n=2k-1$ 대입)

$i^{2(2k-1)+1}+(-i)^{4(2k-1)+1}$

$=i^{4k-1}-i$

$=-i-i=-2i$

18. 다음 보기 중 옳은 것의 개수는? (단, $i = \sqrt{-1}$)

㉠ 16의 제곱근은 4이다. ㉡ 실수를 제곱하면 양수 또는 0이다. ㉢ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z + \bar{z}$ 는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수) ㉣ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z\bar{z}$는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) ㉤ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z = \bar{z}$이면 z는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 제곱해서 16 이 되는 수 $4, -4$ $\therefore$ 거짓
㉡ 실수는 제곱하면 0보다 크거나 같다. $\therefore$ 참
㉢ $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $z + \bar{z} = 2a$ $\therefore$ 참
㉣ $z\bar{z} = a^2 + b^2$ $\therefore$ 참
㉤ $z = \bar{z}$, $a + bi = a - bi$, $2bi = 0$, $b = 0$ $\therefore$ $z = a = \bar{z}$ $\therefore$ 참

19. 임의의 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 의 곱 $z\bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ 을 간단히 하면?

① $-y$ ② $-x$ ③ x ④ y ⑤ 0

해설

$z\bar{z} = 1$ 에서 $\frac{1}{z} = \bar{z} = x - yi$

$$\begin{aligned} \therefore \ \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2}\left\{(x + yi) + (x - yi)\right\} \\ &= \frac{1}{2} \times 2x \\ &= x \end{aligned}$$

20. 복소수 z 에 대하여 $3z+\bar{z}(1+i)=3-i$ 가 성립할 때, $z\bar{z}$ 의 값은?

① -3 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 2 ⑤ 4

해설

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$
이것을 주어진 식에 대입하면
$3(a+bi)+(a-bi)(1+i)=3-i$
$3a+3bi+a+ai-bi+b=3-i$
$(4a+b)+(a+2b)i=3-i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $4a+b=3$, $a+2b=-1$

$$\begin{cases} 4a+b=3 & \cdots ㄱ \\ a+2b=-1 & \cdots ㄴ \end{cases}$$ 에서

ㄱ $\times 2-$ ㄴ 을 하면 $7a=7$,
$\therefore\ a=1$
$a=1$ 을 ㄱ에 대입하면 $b=-1$
따라서 $z=a+bi=1-i$ 이므로 $z\bar{z}=(1-i)(1+i)=2$

21. 두 복소수 α, β 에 대하여 $\alpha+\overline{\beta}=2008i$ 일 때, $\overline{\alpha}+\beta$ 의 값은? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① 2008
② -2008
③ $2008i$
④ $-2008i$
⑤ 일정하지 않다.

해설

켤레복소수의 성질에서

$\alpha+\overline{\beta}=2008i$ 일 때

$\overline{\alpha+\overline{\beta}}=\overline{2008i}$

$\overline{\alpha}+\beta=-2008i$

22. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $2z+3\overline{z}=5-2i$를 만족하는 복소수 z의 역수는?

① $-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i$　② $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$　③ $-1-2i$
④ $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$　⑤ $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

해설

$z=a+bi,\ \overline{z}=a-bi$ ($a,\ b$ 는 실수)라 두면

$2z+3\overline{z}=5-2i$

$2(a+bi)+3(a-bi)=5-2i$

$5a-bi=5-2i$

복소수 상등에 의하여

$a=1,\ b=2$

$\therefore\ z=1+2i$

(z의 역수)$=\frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

23. $w = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $1 + w + w^2 + \cdots + w^{100}$ 의 값은?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 0

④ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$w = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$$w^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$$

$$= \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$w^3 = w \cdot w^2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1-\sqrt{3}}{2} = \frac{1-3i^2}{4} = 1$$

$1 + w + w^2 = 1 + \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} + \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} = 0$ 이므로

$$\therefore 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + \cdots + w^{100}$$

$$= 1 + w + w^2 + w^3(1 + w + w^2) + \cdots$$

$$+ w^{96}(1 + w + w^2) + w^{99}(1 + w)$$

$$= 0 + 0 + \cdots + 0 + w^{99}(1 + w) = (w^3)^{33} \cdot (1 + w)$$

$$= 1 + w = 1 + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

24. 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{-2}-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$ 을 간단히 하여 $a+bi$ 의 꼴로 나타낼 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12\sqrt{2}$

해설

$$\sqrt{-3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{-2}-\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$$

$$=(\sqrt{-3}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{-2})-\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$$

$$=\sqrt{-6}\times\sqrt{-6}-\sqrt{-2}-\sqrt{-2}$$

$$=-\sqrt{36}-\sqrt{2}i-\sqrt{2}i=-6-2\sqrt{2}i$$

$$\therefore\ ab=12\sqrt{2}$$

25. 다음을 계산하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3 + 3i$

해설

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

$$= \sqrt{3 \cdot (-3)} - \sqrt{(-3) \cdot (-3)} + \sqrt{\frac{-18}{2}} - \sqrt{\frac{18}{-2}}$$

$$= \sqrt{-9} - \sqrt{9} + \sqrt{-9} - \sqrt{-9}$$

$$= -\sqrt{9} + \sqrt{-9}$$

$$= -3 + 3i$$